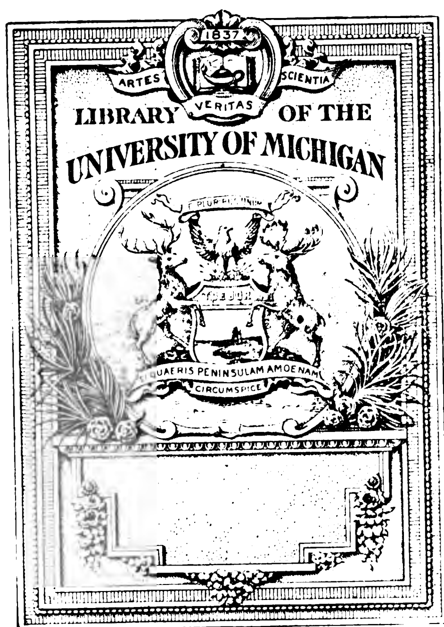


Typ. J. VAN BOEKHOVEN, Utrecht.

OVER EEN BIJZONDERE SOORT

VAN

GEHEELE FUNCTIËN.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT,

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS

DR. M. TH. HOUTSMA,

Hoogleeraar in de Faculteit der Letteren en Wijsbegeerte.

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN

DE FACULTEIT VAN WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

op Maandag 15 Juni 1896, des namiddags te 4 uur,

DOOR

ALBERT ANTONIE NIJLAND,

Observator aan de Sterrewacht te Utrecht,

geboren te Utrecht.

UTRECHT,

J. VAN BOEKHOVEN.

1896.

AAN MIJN' VADER.

Dat dit proefschrift reeds in Januari 1895 gereed was, en eerst nu het licht ziet, vindt zijn verklaring in mijn werkzaamheden aan de Utrechtsche Sterrewacht, in verband met het lang gekoesterde en nu ten slotte toch nog om bijzondere redenen opgegeven plan, om tegelijk met deze mathematische, een astronomische dissertatie te verdedigen.

Ofschoon ik, zoo men wil, al sedert bijna anderhalf jaar het einde mijner Akademische studiën bereikt heb, en dit einde, in andere opvatting, niet of nauwlijks vóor 1897 bereikt zal worden, grijp ik toch deze gelegenheid aan, om U, Hoogleeraren in de Faculteit van Wis- en Natuurkunde, mijn' hartelijken dank te betuigen voor wat Gij tot mijn vorming hebt bijgedragen, en voor het vele, dat mij Uw voortreffelijk onderwijs en Uw zoo aangename omgang gedurende tal van jaren hebben doen genieten. Zoo ergens, dan heeft men in onze Faculteit recht, te spreken van een' band, die leeraren en leerlingen bindt, een' band, die misschien ook zijn oorzaak vindt in, zeker telkens uitlokt tot de particuliere gesprekken over bij de studie gerezen bezwaren, privatissima, die naast en ter aanvulling van de colleges zoo uitnemend geschikt zijn, om de studie te verlichten.

U in het bijzonder, Hooggeleerde KAPTEIJN, *Hooggeachte*

promotor, breng ik mijn' dank voor Uw zoo bij uitstek leerrijke en heldere colleges, dank voor Uw' vriendschappelijken omgang, dank voor de groote bereidwilligheid, waarmede Ge steeds Uw' tijd beschikbaar steldet, zoo er studiebezwaren uit den weg te ruimen waren, dank ten slotte voor de hulp, mij bij het samenstellen van dit proefschrift verleend.

Het U. S. C., dat ook mij zoo veel en zoo velerlei bood, geve tot in lengte van jaren blijken van zijn krachtigen bloei!

OVER EEN BIJZONDERE SOORT

VAN

GEHEELE FUNCTIËN.

INLEIDING.

§ 1. Onder den titel „Sur une espèce particulière de fonctions entières nées du développement de la fonction $\frac{1}{1-v} e^{-\frac{xv}{1-v}}$ suivant les puissances de v" komen in de nagelaten papieren van ABEL functiën voor, waarvan enkele opgegeven eigenschappen doen vermoeden, dat ze de moeite van een onderzoek ruimschoots zullen loonen.

Alleen het feit, dat een ABEL de studie van een onderwerp onderneemt, zou al voldoende de belangstelling van anderen kunnen motiveeren. Toch komen deze φ-functiën slechts, voor zoover mij bekend is, in drie verhandelingen voor. TCHEBYCHEF gaat van een vraagstuk uit de waarschijnlijkheidsrekening uit, en komt tot een soort van functiën, die trigonometrische, bolfunctiën of φ-functiën zijn, naar gelang aan de gewichten, die in het oorspronkelijke vraagstuk een rol spelen, verschillende waarden worden toegekend. LAGUERRE bewijst behalve de door ABEL gegeven eigenschappen nog verscheiden andere en brengt een functie, die zeer nauw met $\varphi_n(x)$ samenhangt, in innig verband met den integraal-logarithmus. HALPHÉN komt bij de studie van een bepaalde soort van reeksontwikkeling naar φ_n tot zeer vreemde resultaten.

De overeenkomst der φ-functiën met de bolfunctiën is wel hun meest op den voorgrond tredende eigenschap. In hoofdstuk V wordt deze overeenkomst nader toegelicht. Ik kon het boekje van TODHUNTER [1]), om zoo te zeggen, op den voet

[1]) An elementary treatise on LAPLACE'S, LAMÉ'S and BESSEL'S functions.

volgen, en voor de meeste eigenschappen der bolfunctiën met één variabele analoga bij de φ-functiën vinden.

Ongelukkig heb ik de overeenkomst met de bolfunctiën nog niet kunnen uitbreiden op de ontwikkeling van een willekeurige functie in den vorm $\sum_{0}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, waarin a_n constanten voorstellen.

Er bestaan m. i. geen voldoende redenen om aan te nemen, dat de ontwikkeling onmogelijk is, maar ik ben tot nog toe niet in staat geweest, de mogelijkheid of de onmogelijkheid te bewijzen. 't Spreekt wel van zelf, dat vooral op dit gebied mijn taak alles behalve als voltooid beschouwd kan worden; ik meende echter met dit proefschrift niet langer te mogen wachten, vooral omdat niet te voorzien is, hoeveel tijd mij de oplossing van de vraag: mag een willekeurige functie naar φ's ontwikkeld worden, nog kosten kan.

Het onderzoek van de eigenschappen der φ-functie was het onderwerp eener Utrechtsche prijsvraag van 1888, waarop geen antwoorden zijn ingekomen.

HOOFDSTUK I.

DE FUNCTIE $\varphi_n(x)$.

§ 2. ABEL's definitie [1]) luidt:

$$\frac{1}{1-v} e^{-\frac{xv}{1-v}} = \sum_0^\infty \varphi_n(x) v^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wanneer men na ontwikkeling der e-functie $\frac{1}{(1-v)^m}$ vervangt door $\sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!} v^n$, dan vindt men:

$$\varphi_n(x) = 1 - nx + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}, \quad . \quad (2)$$

waarin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

een binominaalcoefficient voorstelt. De ontwikkeling is geldig voor alle eindige waarden van x, onder de voorwaarde $v < 1$. Wordt $\varphi_n(x)$ gedefinieerd door de vergelijking (2), dan kan men n ook negatief of gebroken nemen, in welk geval $\varphi_n(x)$ geen polynomium is, maar een reeks, absoluut convergent voor alle eindige waarden van x en n.

Als nl. alle teekens positief genomen worden, is

$$u_k = \binom{n}{k}\frac{x^k}{k!},$$

en dus

$$\lim_{k=\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k=\infty} \frac{x(n-k)}{(k+1)^2} < 1.$$

---

[1]) Oeuvres Compl. Ed. SYLOW et LIE. 1881. T. II p. 284.

§ 3. De functie $\varphi_n(x)$ kan zeer verschillende vormen aannemen. Drie daarvan laat ik hier volgen; een paar andere vinden in §§ 15 en 17 een plaats.

a. Vooreerst is $\varphi_n(x)$ te schrijven als residu in den vorm

$$\mathcal{E} \frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)((t^{n+1}))} = \sum_0^\infty \varphi_m(x) \quad \mathcal{E} \frac{t^m}{t^{n+1}}, \quad . \quad . \quad (3)$$

zooals onmiddellijk uit de definitie (1) volgt. Op verschillende wijzen kan men den algemeenen term van $\varphi_n(x)$,

$$u_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!},$$

in twee factoren splitsen, en den eenen factor met t^k, den anderen met t^{-k} vermenigvuldigen. Zijn dan deze factoren algemeene termen van twee reeksen in t, dan is φ_n de coefficient van t^0 in het product dier reeksen, en dus in residuvorm te schrijven.

Stelt men $\quad (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} = (-1)^k \frac{1}{k!\,t^k} \times \binom{n}{k} x^k t^k,$

of $\quad = \frac{1}{k!\,t^k} \times (-1)^k \binom{n}{k} x^k t^k,$

dan is φ_n te schrijven als $\mathcal{E} \frac{e^{\pm \frac{x}{t}} (1 \mp t)^n}{t}$. . . . . . . (4)

Stelt men $\quad (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} = (-1)^k \frac{t^k}{k!} \times \binom{n}{k} \frac{x^k}{t^k},$

of $\quad = \frac{t^k}{k!} \times (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{t^k},$

dan volgt hieruit voor $\varphi_n(x)$ de vorm $\mathcal{E} \frac{e^{\pm \frac{1}{t}} (1 \mp t\,x)^n}{t}$. (5)

Splitst men $\quad t^n u_{k+1} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!} t^k t^{n-k}$ in twee factoren, dan vindt men de residu-vormen

$$\varphi_n(x) = \mathcal{E} \frac{e^{\mp xt}(1 \pm t)^n}{t^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en

$$\varphi_n(x) = \mathcal{E} \frac{e^{\pm t}(t \mp x)^n}{t^{n+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

b. HALPHÉN [1]) schrijft $\varphi_n(x)$ in den vorm

$$\varphi_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De contrôle door de verg. (2) ligt voor de hand. 't Is me niet duidelijk, hoe HALPHÉN tot deze uitdrukking gekomen is. Wellicht door de differentiaalvergelijking van § 22, waar de vorm (8) van zelf voor den dag komt.

In symbolische schrijfwijze [2]) kan (8) vervangen worden door

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} - 1\right)^n x^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

De beide residu-vormen (6) en (7) leveren deze nieuwe formules:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n}{dt^n} \left\{ e^{\pm xt} (1 \mp t)^n \right\} \right|_{t=0} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

en

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \left| \frac{d^n}{dt^n} \left\{ e^{\pm t} (t \mp x)^n \right\} \right|_{t=0}, \quad . \quad . \quad (11)$$

of, symbolisch,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \left| \left(\frac{d}{dt} \pm x \right)^n (1 \mp t)^n \right|_{t=0} \quad . \quad . \quad (12)$$

en

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} \left| \left(\frac{d}{dt} \pm 1 \right)^n (t \mp x)^n \right|_{t=\infty} \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

c. In GAUSS' notatie voor de hypergeometrische reeks is

$$\varphi_n(x) = \mathrm{F}\left(-n, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right)_{\beta=\infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

---

[1]) C. R. XCV p. 629.

[2]) Men zie bv. FORSYTH, Diff. Equations bl. 44.

De algemeene term dier reeks,

$$\frac{\alpha\,(\alpha+1)\ldots.(\alpha+k)\,\beta\,(\beta+1)\ldots.(\beta+k)}{(k+1)!\,\gamma\,(\gamma+1)\ldots.(\gamma+k)}x^{k+1}$$

wordt nl.

$$(-1)^{k+1}\frac{n\,(n-1)\ldots(n-k)\,\beta\,(\beta+1)\ldots(\beta+k)}{(k+1)!\,(k+1)!\,\beta^{k+1}}x^{k+1}$$

en dus, voor $\beta=\infty$,

$$(-1)^{k+1}\binom{n}{k+1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

conform met (2).

§ 4. Uit (2) volgt deze diff.-verg. [1]) voor $\varphi_n(x)$:

$$x\,\varphi''_n(x)+(1-x)\,\varphi'_n(x)+n\,\varphi_n(x)=0, \quad . \quad . \quad (15)$$

ook te schrijven in den vorm

$$\frac{d}{dx}\left\{x\,e^{-x}\,\varphi'_n(x)\right\}+ne^{-x}\,\varphi_n(x)=0, \quad . \quad . \quad (16)$$

en een bijzonder geval van de diff.-verg. der hypergeometrische reeks

$$x\,(1-x)\,y''+\left\{\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x\right\}y'-\alpha\beta\,y=0.$$

Worden nl. α, γ en x vervangen door $-n$, 1 en $\frac{x}{\beta}$, dan gaat deze diff.-verg. over in

$$x\,(\beta-x)\,y''+\left\{\beta-(1+\beta-n)\,x\right\}y'+n\beta\,y=0,$$

of, voor $\beta=\infty$,

$$x\,y''+(1-x)\,y'+ny=0.$$

De diff.-verg., waaraan een hypergeometrische reeks $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ voldoet, heeft in 't algemeen een tweede oplossing van den vorm

$$x^{1-\gamma}\,F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,x).$$

Voor $\varphi_n(x)$ is echter $\gamma=1$, zoodat de beide oplossingen samenvallen. Hieruit is op te maken dat slechts één polynomium of reeks aan de verg. (15) voldoet. Een direct onderzoek bevestigt dit vermoeden. De diff.-verg. (15) laat zich op de volgende wijze symbolisch schrijven:

---

[1]) **In hetgeen volgt, zullen differentiaalquotienten zoo veel mogelijk door accenten worden aangegeven.**

$$(n - \vartheta)(y) + \frac{1}{x}\vartheta^2(y) = 0,$$

waarin ϑ den operator $x\dfrac{d}{dx}$ voorstelt.

Stelt men hierin

$$y = a_m x^m + a^{m+1} x^{m+1} + a_{m+2} x^{m+2} + \dots,$$

dan volgt uit de resulteerende, identiek te vervullen vergelijking het stel voorwaarden

$$m^2 a_m = 0,$$
$$(m+1)^2 a_{m+1} = (n-m) a_m,$$
$$(m+2)^2 a_{m+2} = (n-m-1) a_{m+1},$$
$$\dots\dots\dots$$

Daar a_m niet nul kan zijn, is $m^2 = 0$ te stellen. De vierkantsvergelijking in m, die ook in analoge gevallen optreedt, heeft hier twee gelijke wortels. De diff.-verg. (15) heeft dus slechts één oplossing in reeksvorm. De reeks wordt bovendien polynomium, doordat alle a's na a_n den factor nul hebben. Hetzelfde resultaat wordt bereikt, als men aan (15) tracht te voldoen door een polynomium van den vorm

$$y = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Substitutie in (15) geeft de voorwaarde $p = n$.

§ 5. Met behulp van (15) en (2) zijn nu zeer gemakkelijk de volgende eigenschappen te contrôleeren, die de analogie met de bolfunctiën al zeer duidelijk in het licht stellen:

$$x\varphi''_n(x) + \varphi'_n(x) + n\varphi_{n-1}(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

of

$$\frac{d}{dx}\left(x\varphi'_n(x)\right) + n\varphi_{n-1}(x) = 0,$$

$$\varphi_n(x) = \varphi'_n(x) - \varphi'_{n+1}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$\frac{x}{n}\varphi'_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$(n+1)\varphi_{n+1}(x) - (n+1-x)\varphi_n(x) = x\varphi'_n(x), \quad . \quad (20)$$

$$n\varphi'_{n-1}(x) + (x-n)\varphi'_n(x) = n\varphi_n(x), \quad . \quad . \quad (21)$$



$$n\,\varphi'_{n-1}(x) + (x - n)\,\varphi'_{n+1}(x) = (2n - x)\,\varphi_n(x)\,, \quad (22)$$

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \int_0^x \varphi_{n-1}(z)\,dz\,, \quad . \; . \; . \quad (23)$$

$$(n + 1)\,\varphi_{n+1}(x) - (2n + 1 - x)\,\varphi_n(x) + n\,\varphi_{n-1}(x) = 0. \quad (24)$$

Deze eigenschappen hangen natuurlijk onderling op vele wijzen samen. Ze zijn alle als afgeleiden te beschouwen van twee grondformules, de diff.-verg. (15) en de recurrente betrekking (24). Tweevoudige differentiatie van (24) geeft nl. een betrekking tusschen $\varphi''_{n+1}(x)$, $\varphi''_n(x)$, $\varphi''_{n-1}(x)$ en $\varphi'_n(x)$; driemalige toepassing van (15) levert dan de formule (19), waaruit de overige gemakkelijk volgen. Grootendeels kunnen ze ook op eenvoudige wijze uit (8) worden afgeleid; zoo ontstaat (18) bijna onmiddellijk door differentiatie van (8); zoo vindt men (19) op deze wijze:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x}) = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \left[x \frac{d}{dx}(x^{n-1} e^{-x}) + x^{n-1} e^{-x}\right] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} \left[x \left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x^{n-1} e^{-x})\right] + 2\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^{n-1} e^{-x}) =$$

$$= x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{n-1} e^{-x}) + n \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^{n-1} e^{-x}),$$

d. i.
$$\varphi_n(x) = \frac{x}{n}\,\varphi'_n(x) + \varphi_{n-1}(x).$$

Differentiatie der formules (15) tot (24) zou tal van nieuwe betrekkingen opleveren; ik geef er hier twee, afgeleid door (15) en (24) k-maal te differentieeren:

$$x\,\varphi_n^{(k+2)}(x) + (k + 1 - x)\,\varphi_n^{(k+1)}(x) + (n - k)\,\varphi_n^{(k)}(x) = 0 \quad (25)$$

en

$$(n + 1)\,\varphi_{n+1}^{(k)}(x) - (2n + 1 - x)\,\varphi_n^{(k)}(x) + (n + k)\,\varphi_{n-1}^{(k)}(x) = 0. \quad (26)$$

§ 6. De functie $\varphi_n(x)$ heeft dergelijke integraal-eigenschappen als de trigonometrische, de Besselsche en de bolfunctiën. Vermenigvuldigt men het produkt van de beide absoluut convergente reeksen

$$\frac{1}{1-v}\, e^{-\frac{xv}{1-v}} = \sum_0^\infty \varphi_n(x)\, v^n$$

en

$$\frac{1}{1-u}\, e^{-\frac{xu}{1-u}} = \sum_0^\infty \varphi_m(x)\, u^m$$

met e^{-x}, dan vindt men door integratie tusschen 0 en ∞

$$\frac{1}{(1-v)(1-u)}\int_0^\infty e^{-x\frac{1-vu}{(1-v)(1-u)}}\, dx = \sum_0^\infty \sum_0^\infty v^n u^m \int_0^\infty e^{-x} \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx.$$

Het eerste lid laat zich schrijven als $\frac{1}{1-uv}$, waaruit deze eigenschappen volgen: [1])

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi_m \varphi_n\, dx = 0, \text{ voor } m \gtrless n, \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi_n^2\, dx = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Deze eigenschappen komen reeds in de papieren van ABEL voor; ze leeren een functie naar φ_n's ontwikkelen, *als men weet, dat deze ontwikkeling mogelijk is.* Zoo moet b.v. x^μ geschreven kunnen worden in den vorm

$$x^\mu = \sum_0^\mu A_i^\mu\, \varphi_i(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

omdat $\varphi_n(x)$ een polynomium is. Dan worden echter de coefficienten A_i^μ gemakkelijk door (27) en (28) bepaald:

$$A_i^\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \varphi_i(x)\, dx = (-1)^i \frac{\mu!\,\mu!}{i!\,(\mu-i)!}, \quad . \quad (30)$$

zooals in § 38 nader wordt uitgewerkt.
Uit (29) volgt nu ook

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi_m x^n\, dx = 0 \text{ voor } n < m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

---

[1]) **Waar geen verwarring ontstaan kan, zal ik voortaan dikwijls de functie $\varphi_n(x)$ zonder argument schrijven.**

en $$\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi_m\,\omega_n(x)\,dx = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32)$$

zoo $\omega_n(x)$ een polynomium van graad n, en weder $n < m$ is.

§ 7. De formules (27) en (28) volgen ook zeer eenvoudig uit de diff.-verg. (16).

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\,\varphi_m\,\varphi_n\,dx = -\frac{1}{n}\int_0^\infty \varphi_m \frac{d}{dx}(x\,e^{-x}\,\varphi'_n)\,dx =$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\varphi'_m\,\varphi'_n\,dx - \frac{1}{n}\Big|\,e^{-x} \times \text{een polynomium}\,\Big|_0^\infty .$$

Derhalve $$I = \frac{1}{n}\int_0^\infty x\,e^{-x}\varphi'_m\,\varphi'_n\,dx,$$

maar ook

$$= \frac{1}{m}\int_0^\infty x\,e^{-x}\,\varphi'_m\,\varphi'_n\,dx.$$

Voor $m \gtrless n$ moet dus $I = 0$ zijn. Verder is dan volgens (32)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi_n\,\varphi'_n\,dx = 0\,,$$

of, na partieele integratie,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi^2_n\,dx = \Big|\,e^{-x}\,\varphi_n\,\varphi_n\,\Big|_0^\infty = 1.$$

Nog een derde bewijs kan geleverd worden:

$$\frac{d}{dx}\left(\omega_n(x)\int_0^x e^{-x}\varphi_m\,dx\right) = \omega'_n\int_0^x e^{-\;}\;\varphi_m\,dx + \omega_n\,e^{-x}\,\varphi_m\,,$$

dus

$$\Big|\,\omega_n(x)\int_0^x e^{-x}\,\varphi_m\,dx\,\Big|_0^\infty = \int_0^\infty \omega'_n\,\mathrm{P}_1\,dx + \int_0^\infty \omega_n\,e^{-x}\,\varphi_m\,dx\,,$$

waarin $$\mathrm{P}_1 = \int_0^x e^{-x}\,\varphi_m\,dx.$$

De integraal in het eerste lid is te schrijven als

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{e^x}{m!} \left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^m e^{-x})\, dx = \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} (x^m e^{-x}).$$

Bij uitwerking wordt de vorm $\frac{\omega_n}{m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} (x^m e^{-x})$ een polynomium, vermenigvuldigd met e^{-x}; hij verdwijnt dus voor de grenzen 0 en ∞, zoodat

$$\int_0^\infty \omega_n e^{-x} \varphi_m\, dx = -\int_0^\infty \omega'_n \mathrm{P}_1\, dx = \int_0^\infty \omega''_n \mathrm{P}_2\, dx = \ldots.$$

$$\ldots. = (-1)^m \int_0^\infty \omega_n^{(m)} \mathrm{P}_m\, dx \text{ is.}$$

Hierin is nu P_m een m-voudige integraal, tusschen de grenzen 0 en x, van $e^{-x} \varphi_m(x)$, d. i. van $\frac{1}{m!}\left(\frac{d}{dx}\right)^m (x^m e^{-x})$, welke integraal de waarde $\frac{x^m e^{-x}}{m!}$ heeft. Is nu $n < m$, dan is $\omega_n^{(m)} = 0$,

dus ook
$$\int_0^\infty \omega_n(x)\, e^{-x} \varphi_m(x)\, dx = 0,$$

waaruit (27) volgt, door voor $\omega_n(x)$ achtereenvolgens x^n, x^{n-1} .... te nemen.

Is $n = m$ dan is $\omega_n^{(m)} = k$, een constante, dus

$$\int_0^\infty \omega_m e^{-x} \varphi_m\, dx = (-1)^m k.$$

Stelt men $\omega_m(x) = x^m$, dan is $k = m!$ en $\int_0^\infty e^{-x} x^m \varphi_m\, dx = (-1)^m m!$,

terwijl voor $\omega_m = \varphi_m$ $\quad k = (-1)^m$ wordt en $\int_0^\infty e^{-x} \varphi_m^2\, dx = 1$.

§ 8. De functie $\varphi_n(x)$ is het eenige polynomium van graad n, dat den integraal $\int^\infty e^{-x} x^m \varphi_n\, dx$ voor $m < n$ doet verdwijnen.

Zij $\mathfrak{Q}$ nl. een polynomium, dat deze eigenschap ook bezitten zou.

Stel
$$\int_x^\infty e^{-x}\,\mathfrak{Q}\,dx = e^{-x}\,\mathfrak{Q}_1,$$
$$\int_x^\infty e^{-x}\,\mathfrak{Q}_1\,dx = e^{-x}\,\mathfrak{Q}_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\int_x^\infty e^{-x}\,\mathfrak{Q}_{n-1}\,dx = e^{-x}\,\mathfrak{Q}_n,$$
zoodat dus
$$e^{-x}\,\mathfrak{Q}_{n-k} = (-1)^k \left(\frac{d}{dx}\right)^k (e^{-x}\,\mathfrak{Q}_n).$$
Nu gaat $\int_x^\infty e^{-x}\,\mathfrak{Q}\,x^m\,dx$, na partieele integratie, over in
$$x^m\,e^{-x}\,\mathfrak{Q}_1 + m\int_x^\infty e^{-x}\,\mathfrak{Q}_1\,x^{m-1}\,dx =$$
$$= x^m\,e^{-x}\,\mathfrak{Q}_1 + m\,x^{m-1}\,e^{-x}\,\mathfrak{Q}_2 + \ldots + m!\,e^{-x}\,\mathfrak{Q}_{m+1}.$$
Voor alle waarden $m = 0$ $m = 1$ .... $m = n - 1$ moet deze vorm nul zijn, als $x = 0$ gesteld is. Dus moeten, voor $x = 0$, alle vormen $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, ... $\mathfrak{Q}_n$ nul worden. Het is gemakkelijk in te zien, dat alle $\mathfrak{Q}$'s tegelijk met $\mathfrak{Q}$ van graad n zijn. Bevatte $\mathfrak{Q}_n$ een term x^k $(k < n)$, dan zou deze term, na k-voudige differentiatie, in $\mathfrak{Q}_{n-k}$ een' term van graad nul geven, die $\mathfrak{Q}_{n-k}$ verhinderen zou, voor $x = 0$ nul te worden. Derhalve is $\mathfrak{Q}_n = \mathrm{C}\,x^n$, waarin C een constante.

Dus is
$$e^{-x}\,\mathfrak{Q}_n = \mathrm{C}\,e^{-x}\,x^n$$
en
$$e^{-x}\,\mathfrak{Q} = \mathrm{C}' \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}\,\mathfrak{Q}_n)$$
of
$$\mathfrak{Q} = \mathrm{C}''\,\varphi_n(x).$$
Het bewijs kan ook aldus geleverd worden [1]). Als $\varphi_n(x)$ en $\mathfrak{Q}$ beide den integraal $\int_0^\infty e^{-x}\,\omega_m\,\varphi_n\,dx$ nul maken, dan doet dat ook de som $\varphi_n + k\,\mathfrak{Q}$. Nu is k altijd zoo te kiezen, dat

---

[1]) Cf. **Jordan**, Cours d'analyse. 1883. Tome II p. 248.

$\varphi_n + k\,\Omega$ van graad $n - 1$ wordt. Kiest men $\omega_m = \varphi_n + k\,\Omega$ $(m = n - 1)$, dan zou dus $\int_0^\infty e^{-x}\,\omega_m{}^2\,dx$ nul moeten zijn.

Daar nu $e^{-x}\,\omega^2{}_m$ nergens van teeken verandert, moet overal tusschen de grenzen 0 en ∞

$$e^{-x}\,\omega^2{}_m = 0 \text{ zijn},$$

d. i.

$$\omega_m = 0$$

of

$$\Omega = C''\,\varphi_n.$$

§ 9. De wortels van $\varphi_n(x)$ zijn alle reëel, positief en onderling verschillend.

Had φ_n een' negatieven of een stel imaginaire wortels, dan was φ_n voor te stellen door M N, waarin $M = x + c$ of $= (x - \alpha)^2 + \beta^2$ en dus N van graad $< n$. Nu is $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ altijd positief, terwijl $x + c$ positief is, als x tusschen de grenzen 0 en ∞ blijft. M verandert derhalve tusschen deze grenzen niet van teeken. Kiest men nu $\omega(x) = N$, dan wordt (32)

$$\int_0^\infty e^{-x}\,M\,N^2\,dx = 0,$$

een ongerijmdheid, omdat geen der integraal-elementen van teeken verandert.

Een tweede bewijs is aldus te geven. Als bijzonder geval van (32) is

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\varphi_n\,dx = 0\,,$$

waaruit volgt, dat φ_n van teeken verandert voor een waarde $x = a$, liggende tusschen 0 en ∞. Men mag derhalve stellen:

$$\varphi_n(x) = (x - a)\,\dot{\varphi}_n(x).$$

Echter is, ook volgens (32),

$$\int_0^\infty e^{-x}\,(x - a)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

of

$$\int_0^\infty e^{-x}\,(x - a)^2\,\dot{\varphi}_n(x)\,dx = 0\,,$$

uit welke verg. nu volgt, dat ook $\varphi_n(x)$ voor een reëele positieve waarde $x = b$ van teeken verandert. Ten slotte is $\varphi_n(x) = C(x-a)(x-b) \ldots (x-l)$, waarin $a, b, \ldots l$ alle reëel en positief zijn.

De functie $\varphi_n(x)$ kan ook geen veelvoudige wortels hebben. Was a er een, dan golden de betrekkingen

$$\varphi_n(a) = 0 \text{ en } \varphi'_n(a) = 0.$$

Volgens de diff.-verg. (15) zou dan ook $\varphi''_n(a)$, dus ook $\varphi'''_n(a)$, dus ten slotte $\varphi^{(n)}_n(a) = 0$ moeten zijn, een ongerijmdheid, daar $\varphi^{(n)}_n(a) = \varphi^{(n)}_n(x) = (-1)^n$ is.

De recurrente betrekking (24) leert, dat de functiën φ te beschouwen zijn als Sturmsche functiën: geen twee opeenvolgende φ's kunnen tegelijkertijd nul worden; en, verdwijnt $\varphi_n(x)$, dan zijn $\varphi_{n-1}(x)$ en $\varphi_{n+1}(x)$ van tegengesteld teeken. Nu zijn voor $x = 0$ alle φ's positief; voor $x = \infty$ zijn ze beurtelings positief en negatief. Derhalve vertoont de rij der Sturmsche functiën

$$\varphi_n(x), \varphi_{n-1}(x), \ldots \varphi_2(x), \varphi_1(x), \varphi_0(x)$$

voor $x = 0$ en voor $x = \infty$ resp. nul en n variaties, waaruit weder volgt, dat $\varphi_n(x)$ n reëele, positieve wortels heeft.

§ 10. Beschouwt men $X = \varphi_n(x)$ als eerste, $X_1 = \varphi'_n(x)$ als tweede Sturmsche functie, dan leert de verg. (21) dat $X_2 = -\varphi'_{n-1}(x)$ de derde wordt. Stelt men in de verg. (26) $k = 1$ en vervangt men $n+1$ door $n, n-1$, &c, dan blijkt uit

$$n\,\varphi'_n(x) + (x - 2n + 1)\,\varphi'_{n-1}(x) + n\,\varphi'_{n-2}(x) = 0,$$

$$(n-1)\,\varphi'_{n-1}(x) + (x - 2n - 1)\,\varphi'_{n-2}(x) + (n-1)\,\varphi'_{n-3}(x) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dat

$$X_3 = \varphi'_{n-2}(x),$$

$$X_4 = -\varphi'_{n-3}(x),$$

$$X_5 = \varphi'_{n-4}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de verdere Sturmsche functiën van $\varphi_n(x)$ zijn. Te beginnen

bij X_2 komen zij echter alle, behoudens het teeken, ook bij φ_{n-1} voor, die tot Sturmsche reeks heeft:

$$\varphi_{n-1}(x),\ \varphi'_{n-1}(x),\ -\varphi'_{n-2}(x),\ +\varphi'_{n-3}(x),\ -\varphi'_{n-4}(x), \text{ etc.}$$

Voor $n = 2, 3, 4, 5$ vind ik, na vermenigvuldiging met den factor $n!$,

$$\begin{aligned} X &= x^2 - 4x + 2 \\ X_1 &= x - 2 \\ X_2 &= +2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} X &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6 \\ X_1 &= -x^2 + 6x - 6 \\ X_2 &= -x + 2 \\ X_3 &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 \\ X_1 &= x^3 - 12x^2 + 36x - 24 \\ X_2 &= x^2 - 6x + 6 \\ X_3 &= x - 2 \\ X_4 &= +2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120 \\ X_1 &= -x^4 + 20x^3 - 120x^2 + 240x - 120 \\ X_2 &= -x^3 + 12x^2 - 36x + 24 \\ X_3 &= -x^2 + 6x - 6 \\ X_4 &= -x + 2 \\ X_5 &= -2. \end{aligned}$$

De beteekenis van deze nauwe overeenstemming wordt duidelijker, zoo men niet φ_{n-1} met φ_n maar met φ'_n vergelijkt.

φ_{n-1} en φ'_n hebben beide een serie van $n-1$ Sturmsche functiën, die behoudens het teeken, en te beginnen bij X_1, volkomen identisch zijn. Bepaalt men het aantal variaties voor $x = a$ en $x = b$, dan kan dit aantal voor φ'_n en φ_{n-1} alleen door toedoen van X verschillen, d. i. hoogstens één verschillen: Indien tusschen twee grenzen a en b p wortels van φ'_n liggen en q van φ_{n-1}, dan verschillen de getallen p en q hoogstens 1.

Uit de vergelijking (19) volgt echter een belangrijker eigen-

schap omtrent de wortels van $\varphi_n(x) = 0$. Zijn a en b opeenvolgende wortels van $\varphi_n(x) = 0$, dan is

$$a\,\varphi'_n(a) + n\,\varphi_{n-1}(a) = 0$$

en

$$b\,\varphi'_n(b) + n\,\varphi_{n-1}(b) = 0.$$

Daar a, b en n positief zijn, en volgens het theorema van ROLLE $\varphi'_n(a)$ en $\varphi'_n(b)$ van teeken verschillen, hebben ook $\varphi_{n-1}(a)$ en $\varphi_{n-1}(b)$ verschillend teeken, zoodat de vergelijking $\varphi_{n-1}(x) = 0$ een oneven aantal wortels heeft tusschen elk paar opeenvolgende wortels van $\varphi_n(x) = 0$. Daar $\varphi_n(x)$ $n-1$ paren opeenvolgende wortels heeft, kan dit oneven aantal niet anders dan één zijn:

Tusschen twee opeenvolgende wortels der vergelijking $\varphi_n(x) = 0$ ligt één wortel der verg. $\varphi_{n-1}(x) = 0$. En dus ook, vice versa: tusschen twee opeenvolgende wortels van $\varphi_{n-1}(x) = 0$ ligt één wortel van $\varphi_n(x) = 0$, waarvan derhalve voor $n-2$ wortels grenzen gevonden zijn.

De grootste wortel van $\varphi_n(x) = 0$ mist de bovengrens, *de kleinste ligt tusschen 0 en 1.* Dit laatste volgt uit het feit, dat alle wortels positief zijn, in verband met de waarde $x = 1$ die aan $\varphi_1(x) = 0$ voldoet.

Ik laat hier voor $n = 1, 2, 3, 4$ de wortels van $\varphi_n(x) = 0$ volgen.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
				0.323
			0.416	
		0.586		1.746
	1.000		2.294	
		3.414		4.536
			6.290	
				9.395
Som	1^2	2^2	3^2	4^2

Door differentiatie verkrijgt men uit de verg. (19) de analoge vergelijkingen

$$x\,\varphi''_n(x) = (n-1)\,\varphi'_n(x) - n\,\varphi'_{n-1}(x)$$

en

$$x\,\varphi'''_n(x) = (n-2)\,\varphi''_n(x) - n\,\varphi''_{n-1}(x),$$

waaruit, geheel als boven voor $\varphi_n(x)$ werd gedaan, bewezen wordt, dat steeds één wortel van φ'_{n-1} en φ''_{n-1} gelegen is tusschen twee opeenvolgende wortels van φ'_n, resp. φ''_n. Daar bovendien φ'_2 den wortel $x = 2$ en φ''_3 den wortel $x = 3$ heeft, is men gerechtigd tot dit besluit:

Tusschen twee opeenvolgende wortels, maxima en inflexiepunten van $y = \varphi_n(x)$ ligt resp. één wortel, één maximum, één inflexiepunt van $y = \varphi_{n-1}(x)$. „Maximum" is hier op te vatten als „maximum of minimum". En: $\varphi_n(x)$ heeft stellig één wortel, één maximum, één inflexiepunt resp. voor $x < 1$, $x < 2$, $x < 3$.

§ 11. In deze paragraaf voeg ik nog enkele eigenschappen der φ-functie bijeen.

a. Uit de formule (18) volgt

$$\varphi'_1 = \varphi_1 + \varphi'_2$$
$$\varphi'_2 = \varphi_2 + \varphi'_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi'_n = \varphi_n + \varphi'_{n+1},$$

zoodat dus $\varphi'_1 = \sum_1^n \varphi_i + \varphi'_{n+1}$ of, daar $\varphi'_1 = -1 = -\varphi_0$ is,

$$\sum_0^n \varphi_i(x) = -\,\varphi'_{n+1}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

b. Uit (17) volgt

$$i\,\varphi_{i-1} = -\,x\,\varphi''_i - \varphi'_i,$$

dus

$$\sum_1^n i\,\varphi_{i-1} = -\,x\sum_1^n \varphi''_i - \sum_1^n \varphi'_i.$$

Formule (33) maakt van het tweede lid $x\,\varphi'''_{n+1} + \varphi''_{n+1}$, terwijl men ten slotte, door (17) te differentieeren, deze betrekking vindt:

$$\sum_1^n i\,\varphi_{i-1}(x) = -\,\varphi''_{n+1}(x) - (n+1)\,\varphi'_n(x) \quad . \quad . \quad (34)$$

Nu is

$$\sum_1^n i\,\varphi_{i-1} = n\,\varphi_{n-1} + (n-1)\,\varphi_{n-2} + \ldots + 2\,\varphi_1 + \varphi_0 =$$

$$= (n-1)\,\varphi_{n-1} + (n-2)\,\varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_1 +$$

$$+ \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2} + \ldots + \varphi_1 + \varphi_0 =$$

$$= \sum_1^{n-1} i\,\varphi_i + \sum_0^{n-1} \varphi_i = \sum_1^{n-1} i\,\varphi_i - \varphi'_n,$$

zoodat (34) ook aldus kan geschreven worden:

$$\sum_1^{n-1} i\,\varphi_i(x) = -\varphi''_{n+1}(x) - n\,\varphi'_n(x). \quad . \quad . \quad (35)$$

c. Herhaalde toepassing van (19) geeft

$$\varphi_n - \varphi_0 = x \sum_1^n \frac{\varphi'_i}{i},$$

of

$$\sum_1^n \frac{\varphi'_i}{i} = \frac{\varphi_n(x) - 1}{x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

d. i.

$$\sum_1^n \frac{\varphi_i}{i} = \int_0^x \frac{\varphi_n(x) - 1}{x}\,dx + C, \quad . \quad . \quad (37)$$

waarin

$$C = \sum_1^n \frac{1}{i}.$$

d. De recurrente betrekking (24),

$$(n+1)\,\varphi_{n+1}(x) - (2n+1-x)\,\varphi_n(x) + n\,\varphi_{n-1}(x) = 0,$$

is voor het argument z natuurlijk

$$(n+1)\,\varphi_{n+1}(z) - (2n+1-z)\,\varphi_n(z) + n\,\varphi_{n-1}(z) = 0.$$

Trekt men de tweede verg., vermenigvuldigd met $\varphi_n(x)$, af van de eerste, vermenigvuldigd met $\varphi_n(z)$, dan vindt men

$$(n+1)\,[\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(z) - \varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(z)] = (z-x)\,\varphi_n(x)\,\varphi_n(z)$$
$$+ n\,[\varphi_n(x)\,\varphi_{n-1}(z) - \varphi_{n-1}(x)\,\varphi_n(z)],$$

zoodat

$$(z-x)\sum_0^n \varphi_n(x)\,\varphi_n(z) = (n+1)\Big[\varphi_{n+1}(x)\,\varphi_n(z) - \varphi_n(x)\,\varphi_{n+1}(z)\Big] (38)$$

is.

§ 12. De functie φ met ander argument.

Uit de verg. (2) volgt

$$\varphi_n(rx) = \sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{x^i}{i!} r^i,$$

dus, volgens (29),

$$= \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} r^i \sum_{k=0}^{k=i} (-1)^k \binom{i}{k} \varphi_k(x).$$

Nu geldt algemeen de betrekking

$$\sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=i} u_{ik} = \sum_{k=0}^{k=n} \sum_{i=k}^{i=n} u_{ik} = u_{00} + \\ + u_{10} + u_{11} + \\ + u_{20} + u_{21} + u_{22} + \\ + \ldots \\ + u_{n0} + u_{n1} + \ldots + u_{nn}.$$

$$\left[\text{Cf.} \int_0^a dx \int_0^x z\, dy = \int_0^a dy \int_y^a z\, dx. \right]$$

Zoodat $\varphi_n(rx) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \varphi_k(x) \sum_{i=k}^{i=n} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{k} r^i =$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} B_k^n \varphi_k(x),$$

waarin

$$B_k^n = \sum_{i=k}^{i=n} (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} r^i = r^k \sum_{i=k}^{i=n} (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} r^{i-k} =$$

$$= r^k \binom{n}{k} \sum_0^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} r^i = r^k \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} \quad . \quad (39)$$

Ten slotte wordt dus

$$\varphi_n(rx) = \sum_0^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} \varphi_k(x) \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

In de keus van r is men geheel vrij.

a. $r = 2.$ $\varphi_n(2x) = (-1)^n \sum_0^n \binom{n}{k} (-2)^k \varphi_k(x)$,

in symbolische notatie $(2\varphi - 1)^n$, ... (41)

waarin dan φ^k te vervangen is door $\varphi_k(x)$.

b. $r = -1.$ $\varphi_n(-x) = \sum_0^n \binom{n}{k} (-1)^k 2^{n-k} \varphi_k(x)$,

symbolisch $(2 - \varphi)^n$ . . . . (42)

c. $r = \frac{1}{2}$. $\varphi_n(\frac{1}{2}x) = \sum_0^n \binom{n}{k} 2^{-n} \varphi_k(x)$

of $$2^n \varphi_n(\tfrac{1}{2}x) = (1+\varphi)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

d. $r = \frac{1}{\varrho}$. $\varphi_n\left(\frac{x}{\varrho}\right) = \sum_0^n \binom{n}{k} \varrho^{-k}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{n-k} \varphi_k(x)$

of $$\varrho^n \varphi_n\left(\frac{x}{\varrho}\right) = (\varrho - 1 + \varphi)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

e. $r = \frac{s}{s+1}$. $\varphi_n\left(\frac{sx}{s+1}\right) = \sum_0^n \binom{n}{k} \frac{s^k}{(s+1)^n} \varphi_k(x)$

of $$(s+1)^n \varphi_n\left(\frac{sx}{s+1}\right) = (1+s\varphi)^n. \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

De laatste twee formules hadden in den vorm

$$\sum_0^n \binom{n}{k} \frac{\varphi_k(x)}{(\varrho-1)^k} = \left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\right)^n \varphi_n\left(\frac{x}{\varrho}\right)$$

en $$\sum_0^n \binom{n}{k} (s-1)^k \varphi_k(x) = s^n \varphi_n\left(\frac{s-1}{s} x\right)$$

in § 11 opgenomen kunnen worden.

§ 13. Eigenschappen der coefficienten B_k^n.

Voor $r = 1$ verdwijnen natuurlijk alle B's, behalve B_n^n, die $= 1$ is. Ligt r tusschen 0 en 1, dan zijn alle B's positief; voor $r < 0$ of > 1 hebben ze afwisselende teekens.

Verder gelden, zoozals licht na te gaan is, deze eigenschappen:

$$\left.\begin{array}{ll} B_k^n B_{n-k}^n = r^n(1-r)^n \binom{n}{k}^2 & B_0^n = (1-r)^n \\ \dfrac{B_k^n}{B_{n-k}^n} = \left(\dfrac{1-r}{r}\right)^{n-2k} & B_n^n = r^n \end{array}\right\} . \quad (46)$$

$$\sum_0^n B_k^n = \sum_0^n \binom{n}{k} r^k (1-r)^{n-k} = (1-r+r)^n = 1. \quad (47)$$

Eindelijk is $$B_{rn+r}^n = B_{rn+r-1}^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Het quotient $\dfrac{B_{rn+r}^n}{B_{rn+r-1}}$ is nl. gelijk aan $\dfrac{r(n-rn-r+1)}{(1-r)(rn+r)} = 1.$

Hierin wordt ondersteld $rn + r < n + 1$ of $r < 1$.

Voor $r > 1$ geldt de formule (48) echter ook. Dan toch zijn B^n_{nr+r} en B^n_{nr+r-1} beide $= 0$.

§ 14. Additie-theorema.

Uit de definitie voor $\varphi_n(x)$ volgt:

$$\sum_0^\infty v^n \varphi_n(x+y) = \frac{1}{1-v} e^{-\frac{(x+y)v}{1-v}} =$$

$$= (1-v) \cdot \frac{1}{1-v} e^{-\frac{xv}{1-v}} \cdot \frac{1}{1-v} e^{-\frac{yv}{1-v}} =$$

$$= (1-v) \sum_0^\infty v^n \varphi_n(x) \sum_0^\infty v^m \varphi_m(y).$$

Derhalve is

$$\varphi_n(x+y) = [\varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + \varphi_{n-2}(x)\varphi_2(y) + \dots$$
$$\dots + \varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y)] -$$
$$-[\varphi_{n-1}(x) + \varphi_{n-2}(x)\varphi_1(y) + \dots + \varphi_1(x)\varphi_{n-2}(y) + \varphi_{n-1}(y)]. \quad (49)$$

Deze formule moet voor $n = 1$ gewijzigd worden tot

$$\varphi_1(x+y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y) - 1.$$

Uit (49) is nog af te leiden:

$$\sum_0^n \varphi_k(x+y) = \varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x)\varphi_1(y) + \dots$$
$$\dots + \varphi_1(x)\varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y). \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

§ 15. Ik geef tot besluit van dit hoofdstuk nog een paar vormen voor $\varphi_n(x)$, nl. een' bepaalden integraal en een' determinant-vorm.

In het tweede deel van CAUCHY's „Exercices de Mathématiques" (1827) komen op p. 146 deze integralen voor:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{(a-ir)^{-m} + (a+ir)^{-m}}{2} r^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + rx\right) dr = \\ &= \frac{\pi}{2\,\Gamma(m)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{m-1} e^{-ax}) \\ \text{en}\quad &\int_0^\infty \frac{(a-ir)^{-m} - (a+ir)^{-m}}{2i} r^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + rx\right) dr = \\ &= \frac{\pi}{2\,\Gamma(m)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^{m-1} e^{-ax}), \end{aligned}\right\} (51)$$

waarin n, a en m geheele getallen voorstellen, a en m positief, terwijl ook x positief is, en $i = \sqrt{-1}$.

Stelt men $a = 1$ en $m = n + 1$, dan gaat, in verband met (8), (51) over in

$$\pi e^{-x} \varphi_n(x) = \int_0^\infty \left\{ (1 + ir)^{-n-1} + (1 - ir)^{-n-1} \right\} r^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + rx\right) dr$$

en

$$\pi e^{-x} \varphi_n(x) = i \int_0^\infty \left\{ (1 + ir)^{-n-1} - (1 - ir)^{-n-1} \right\} r^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + rx\right) dr,$$

waaruit door optelling volgt:

$$2\pi e^{-x} \varphi_n(x) = \int_0^\infty (1 + ir)^{-n-1} r^n e^{i\frac{n\pi}{2}} e^{irx} dr +$$

$$+ \int_0^\infty (1 - ir)^{-n-1} r^n e^{-i\frac{n\pi}{2}} e^{-irx} dr. \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Vervangt men in den tweeden integraal r door $-r$, dan wordt (52) met behulp der formule

$$e^{i\frac{n\pi}{2}} = i^n,$$

$$2\pi e^{-x} \varphi_n(x) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{irx}}{(r - i)^{n+1}} r^n dr. \quad . \quad . \quad (53)$$

Scheidt men hierin na substitutie van $r = \cot \beta$ het reëele van het imaginaire deel, dan vindt men

$$2\pi e^{-x} \varphi_n(x) = \int_0^\pi \frac{\sin\{x \cot \beta + (n + 1)\} \beta}{\sin \beta} \cos^n \beta \, d\beta \quad (54)$$

en

$$0 = \int_0^\pi \frac{\cos\{x \cot \beta + (n + 1)\} \beta}{\sin \beta} \cos^n \beta \, d\beta.$$

§ 16. Aan den integraalvorm (54) zijn gemakkelijk de eigenschappen van § 5 te toetsen.

Differentiatie van

$$2\pi\,\varphi_{n+1}(x) = e^x \int_0^\pi \frac{\sin\{x \cot\beta + (n+2)\}\beta}{\sin\beta} \cos^{n+1}\beta\, d\beta \quad (55)$$

naar x geeft nl.

$$2\pi\,\varphi'_{n+1}(x) = e^x \int_0^\pi \frac{\sin\{x \cot\beta + (n+2)\beta\}}{\sin\beta} \cos^{n+1}\beta\, d\beta +$$

$$+ e^x \int_0^\pi \frac{\cos\{x \cot\beta + (n+2)\beta\}}{\sin^2\beta} \cos^{n+2}\beta\, d\beta =$$

$$= e^x \int_0^\pi \frac{\cos\{x \cot\beta + (n+1)\beta\}}{\sin^2\beta} \cos^{n+1}\beta\, d\beta \quad . . . (56)$$

De integraal in het tweede lid treedt ook op bij de differentiatie naar x van (54), zoodat

$$2\pi\,\varphi'_{n+1}(x) = 2\pi\, e^x (e^{-x}\varphi'_n(x) - e^{-x}\varphi_n(x))$$

of

$$\varphi'_{n+1}(x) = \varphi'_n(x) - \varphi_n(x). \quad . . . . . (18)$$

Uit de formule (54) volgt verder, zoo men onder het integraalteeken den factor $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ invoert:

$$2\pi\, e^{-x}\varphi_n(x) = -\int_0^\pi \sin\{x \cot\beta + (n+1)\beta\} \cos^n\beta\, d\cos\beta +$$

$$+ \int_0^\pi \frac{\sin\{x \cot\beta + (n+1)\beta\}}{\sin\beta} \cos^{n+2}\beta\, d\beta,$$

of, na partieele integratie van den eersten der twee integralen

$$2\pi\, e^{-x}\varphi_n(x) = \int_0^\pi \frac{\sin\{x \cot\beta + (n+1)\beta\}}{\sin\beta} \cos^{n+2}\beta\, d\beta +$$

$$+ \int_0^\pi \cos\{x \cot\beta + (n+1)\beta\} \cos^{n+1}\beta\, d\beta -$$

$$- \frac{x}{n+1} \int_0^\pi \frac{\{\cos x \cot\beta + (n+1)\beta\}}{\sin^2\beta} \cos^{n+1}\beta\, d\beta.$$

Telt men in het tweede lid de eerste twee integralen op, en vervangt men den derden door

$$- 2\pi \frac{x}{n+1} e^{-x} (\varphi'_n - \varphi_n),$$

dan komt er, met weglating van den gemeenschappelijken factor $2\pi\, e^{-x}$,

$$(n + 1 - x)\, \varphi_n = (n + 1)\, \varphi_{n+1} - x\, \varphi'_n. \quad . \quad . \quad (20)$$

Bij dit bewijs zij opgemerkt, dat men het recht heeft, den bij de partieele integratie van

$$\int_0^\pi sin \left\{ x \cot \beta + (n + 1)\beta \right\} cos^n \beta \; d \cos \beta$$

optredenden term

$$\left| cos^{n+1} \beta \sin \left\{ x \cot \beta + (n + 1)\beta \right\} \right|_0^\pi$$

gelijk aan nul te stellen omdat de uit $cos^{n+1} \beta$ voortvloeiende factor $(-1)^{n+1}$ opgeheven wordt door een' factor $(-1)^{n+1}$, ontstaande uit

$$sin \; \left\{ x \cot \beta + (n + 1)\beta \right\},$$

terwijl de functie $x \cot \beta$ een periode π heeft en dus

$$(x \cot \beta)_{\beta = \pi} = (x \cot \beta)_{\beta = 0}$$

is, ook al worden de beide leden dezer vergelijking ∞.

De beide formules (18) en (20) zijn voldoende, om alle betrekkingen van § 5 op te leveren.

Nog volgt uit vergelijking van (55) met (56): Herhaalde differentiatie van (55) brengt steeds een' factor $sin\ \beta$ in den noemer van de breuk onder het integraalteeken; in den teller treden beurtelings sinussen en cosinussen op van een argument, dat voortdurend met β afneemt. Naarmate n dus oneven of even is, wordt $\varphi^{(n+2)}_{n+1}(x)$, afgezien van constante factoren, gelijk aan

$$e^x \int_0^\pi \frac{sin\,(x \cot \beta)}{sin^{n+3} \beta} cos^{n+1} \beta \; d\beta \text{ of aan } e^x \int_0^\pi \frac{cos\,(x \cot \beta)}{sin^{n+3} \beta} cos^{n+1} \beta d\beta,$$

welke integralen, geschreven in den vorm

$$-\frac{1}{(n+2)\,x^{n+2}}\int_0^{\pi} \sin(x \cot\beta)\, d\,(x\cot\beta)^{n+2}$$

en

$$-\frac{1}{(n+2)\,x^{n+2}}\int_0^{\pi} \cos(x \cot\beta)\, d\,(x\cot\beta)^{n+2},$$

zuivere functiën van $x \cot\beta$ zijn, functiën derhalve met de periode π. De beide integralen, en daarmede $\varphi_{n+1}^{(n+2)}(x)$ zijn nu nul, waaruit volgt, dat de functie $\varphi_{n+1}(x)$, bepaald door (55), een polynomium van graad $n+1$ in x is.

§ 17. De determinantvorm volgt uit de formule (31):

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,\varphi_n(x)\,x^m\,dx = 0 \text{ voor } m < n.$$

Schrijft men $\varphi_n(x)$ als

$$A_0\,x^n + A_1\,x^{n-1} + \dots + A_{n-1}\,x + A_n$$

en neemt men voor m resp. 0, 1, 2, ... $n-1$, dan treden er steeds integralen van den vorm $\int_0^{\infty} e^{-x}\,x^r\,dx$ op, waarvan de waarde $r!$ is. Derhalve geldt het stel vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) &= A_0\,x^n + A_1\,x^{n-1} + \dots + A_{n-1} + A_n,\\
0 &= A_0\,n! + A_1(n-1)! + \dots + A_{n-1}\,1! + A_n,\\
0 &= A_0(n+1)! + A_1\,n! + \dots + A_{n-1}\,2! + A_n\,1!,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
0 &= A_0(2n-1)! + A_1(2n-2)! + \dots + A_{n-1}\,n! + A_n(n-1)!,
\end{aligned}$$

waaruit volgt $\quad A_0 = \frac{N}{M}\,\varphi_n(x)$

en dus

$$\varphi_n(x) = A_0\,\frac{M}{N} = (-1)^n\,\frac{M}{n!\,N}. \quad \dots \quad (57)$$



Hierin is M de determinant

$$\begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \ldots\ldots & x & 1 \\ n! & (n-1)! & \ldots\ldots & 1! & 1 \\ (n+1)! & n! & \ldots\ldots & 2! & 1! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n-1)! & (2n-2)! & \ldots\ldots & n! & (n-1)! \end{vmatrix}$$

en N de sub-determinant van x^n. Omgekeerd volgt uit (57) wèer de eigenschap (31). De noemer N is nl. een constante, terwijl M bij substitutie in den integraal

$$\int_0^\infty e^{-x} \varphi_n(x)\, x^m\, dx$$

een determinant wordt, die voor $m < n$ twee gelijke rijen heeft.

HOOFDSTUK II.

DE FUNCTIE $\psi_n(x)$.

§ 18. De differentiaalverg. voor $\varphi_n(x)$ heeft nog een tweede particuliere oplossing, die ik $\psi_n(x)$ zal noemen, en die door een bekende methode uit $\varphi_n(x)$ wordt afgeleid.

Voor $\varphi_n(x)$ geldt

$$x\,\varphi''_n + (1 - x)\,\varphi'_n + n\,\varphi_n = 0.$$

Evenzoo voor $\psi_n(x)$:

$$x\,\psi''_n + (1 - x)\,\psi'_n + n\,\psi_n = 0.$$

Elimineert men n uit deze twee vergelijkingen, dan vindt men:

$$\frac{d}{dx}\,log.\,(\psi_n\,\varphi'_n - \varphi_n\,\psi'_n) = 1 - \frac{1}{x},$$

dus

$$\psi_n\,\varphi'_n - \varphi_n\,\psi'_n = C'\,\frac{e^x}{x},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi_n}{\varphi_n}\right) = C\,\frac{e^x}{x\,\varphi_n^2}.$$

En derhalve is

$$\psi_n(x) = \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x\,\varphi_n^2}\,dx \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

een tweede particuliere oplossing der diff.-verg (15).

Deze integraal kan herleid worden tot den integraal-logarithmus.

$\varphi_n(x)$ heeft n enkelvoudige, positieve wortels $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots . \alpha_n$.

Dus is $\frac{1}{x\,\varphi_n^2}$ op deze wijze in breuken te ontbinden:

$$\frac{1}{x\,\varphi_n^2} = \frac{1}{x} + \sum_1^n \frac{A_i}{(x - \alpha_i)^2} + \sum_1^n \frac{B_i}{x - \alpha_i}.$$

Hierin is $A_i = \left| \frac{(x-\alpha_i)^2}{x\,\varphi_n^2} \right|_{x=\alpha_i} = \left| \frac{1}{R_i^2\, x} \right|_{x=\alpha_i}$

en $B_i = \left| \frac{d}{dx} \cdot \frac{(x-\alpha_i)^2}{x\,\varphi_n^2} \right|_{x=\alpha_i} = -\left| \frac{R_i + 2\,x\,R'_i}{R_i^3\, x^2} \right|_{x=\alpha_i}$

zoo $\varphi_n(x) = R_i\,(x - \alpha_i)$ gesteld wordt.

Door partieele integratie vindt men:

$$\int_{-\infty}^{x} A_i \frac{e^x}{(x-\alpha_i)^2}\,dx = -A_i \frac{e^x}{x-\alpha_i} + \int_{-\infty}^{x} \frac{A_i\, e^x}{x-\alpha_i}\,dx,$$

zoodat

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x\,\varphi_n^2}\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\,dx - e^x \sum_1^n \frac{A_i}{x-\alpha_i} + \sum_1^n \int_{-\infty}^{x} \frac{A_i + B_i}{x-\alpha_i}\, e^x\,dx$$

wordt.

Stelt men $\varphi_n = R_i\,(x-\alpha_i)$ in de diff.-verg. (15), dan blijkt R_i te voldoen aan

$$x\,(x-\alpha_i)\,R''_i + (1-x)\,(x-\alpha_i)\,R'_i + 2x\,R'_i + (1-x)\,R_i + \\ + n\,(x-\alpha_i)\,R_i = 0,$$

welke verg. voor $x = \alpha_i$ overgaat in:

$$\left| 2\,x\,R'_i + R_i - x\,R_i \right|_{x=\alpha_i} = 0,$$

d. i. $A_i + B_i = 0.$

We hebben nu:

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x\,\varphi_n^2}\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\,dx - e^x \sum_1^n \frac{A_i}{x-\alpha_i}$$

en ten slotte

$$\psi_n(x) = \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x\,\varphi_n^2}\,dx = \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\,dx + e^x\,\chi_n(x)\,, \quad (59)$$

waarin $\chi_n(x)$ een polynomium in x van graad $n-1$ is, bepaald door

$$\frac{\chi_n}{\varphi_n} = -\sum_1^n \frac{A_i}{x-\alpha_i} \quad (60)$$

Daar uit deze formule voor A_i de waarde $-\frac{\chi_n(\alpha_i)}{\varphi'_n(\alpha_i)}$ volgt, en ook

$$A_i = \left| \frac{1}{R_i^2\, x} \right| x = \alpha_i = \frac{1}{\alpha_i\, \varphi'_n(\alpha_i)\, \varphi'_n(\alpha_i)}$$

is, moet voor $\chi_n(x)$ deze relatie gelden:

$$\chi_n(\alpha_i) = \frac{-1}{\alpha_i\, \varphi'_n(\alpha_i)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

§ 19. De formule (58) definieert de functie $\psi_n(x)$ voor alle negatieve waarden van x; voor alle positieve ook, zoo men dan de principale waarde van den integraal neemt. Voor $x = 0$ is $\psi_n(x)$ onbepaald, terwijl op de volgende wijze bewezen kan worden, dat $\psi_n(-\infty) = 0$ is.

$$\psi_n(-\infty) = \lim_{A=\infty} \psi_n(-A) =$$

$$= \lim_{A=\infty} \varphi_n(-A) \int_{-\infty}^{-A} \frac{e^x}{x\, \varphi_n^2(x)}\, dx = \lim_{A=\infty} \varphi_n(-A) \int_{\infty}^{A} \frac{e^{-x}}{x\, \varphi_n^2(-x)}\, dx.$$

Daar nu $x > A$

en $\varphi_n(-x) > \varphi_n(-A)$

dus $\frac{1}{x\, \varphi_n^2(-x)} < \frac{1}{A\, \varphi_n^2(-A)}$,

is $$\psi_n(-\infty) < \lim_{A=\infty} \varphi_n(-A) \frac{1}{A\, \varphi_n^2(-A)} \int_{\infty}^{A} e^{-x}\, dx,$$

dus, in absolute waarde,

$$\psi_n(-\infty) < \lim_{A=\infty} \frac{1}{A\, \varphi_n(-A)\, e^A},$$

d. i. $$\psi_n(-\infty) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

§ 20. Het resultaat (58) is ook aldus te bereiken: De formule (25) geeft voor $k = n$, en als φ_n door y vervangen wordt,

$$x\, y^{(n+2)} + (n + 1 - x)\, y^{(n+1)} = 0,$$

of, als particuliere oplossing,

$$y^{(n+1)} = \frac{e^x}{x^{n+1}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

dus
$$y^{(n)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz$$
en
$$y = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z\,(z-x)^n}{z^{n+1}}\, dz. \;^{1)} \quad \ldots\ldots \quad (64)$$
De vergelijking $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z}\, dz = \frac{e^x}{x} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z^2}\, dz =$
$$= e^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} + \ldots + \frac{(n-1)\,!}{x^n} \right) + n\,! \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z^{n+1}}\, dz$$
stelt in staat, elken term van (64), na ontwikkeling van het binomium $(z-x)^n$ terug te voeren tot den int.-log. Na herleiding zal men vinden:
$$y = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z\,(z-x)^n}{z^{n+1}}\, dz = e^x\,\pi_n + \Pi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z}\, dz\,,$$
waarin Π_n een polynomium van den n^{den} graad voorstelt, dat juist $\varphi_n\,(x)$ blijkt te zijn, en π_n een polynomium van den graad $n-1$. Daar φ_n en ψ_n aan de diff.-verg. (15) voldoen, volgt uit (59) een diff.-verg. voor χ_n, die na substitutie van
$$\psi'_n = e^x\,\chi'_n + e^x\,\chi_n + \varphi'_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\, dx + \varphi_n\,\frac{e^x}{x}$$
en
$$\psi''_n = e^x\,\chi''_n + 2\,e^x\,\chi'_n + e^x\,\chi_n + \varphi''_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\, dx + 2\,\varphi'_n\,\frac{e^x}{x} +$$
$$+ \varphi_n\,\frac{e^x}{x} - \varphi_n\,\frac{e^x}{x^2}$$
en na eenige herleiding de volgende gedaante aanneemt:
$$x\,\chi''_n + (1+x)\,\chi'_n + (n+1)\,\chi_n + 2\,\varphi'_n = 0\,. \quad . \quad (65)$$

---

[1]) Cf. **Sturm, Cours d'Analyse, 1884. Tome II p. 91.**

Natuurlijk vindt men uit

$$y = e^x \pi_n + \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z} dz,$$

dat π_n ook aan deze diff.-verg. moet voldoen. Gemakkelijk overtuigt men zich echter, dat de verg. (65) slechts één oplossing in den vorm van een polynomium van graad $n-1$ heeft. Hieruit volgt de identiteit van π_n en χ_n. De beide functiën mogen, doordat de vergelijking (65) een tweede lid heeft, zelfs niet in een' constanten factor verschillen.
Uit een en ander volgt nu deze derde vorm voor ψ_n:

$$\psi_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z (z-x)^n}{z^{n+1}} dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

§ 21. In § 18 heb ik den vorm (59) uit (58) afgeleid. Men kan het proces ook omkeeren.
De oplossingen $\qquad y_1 = \varphi_n$
en

$$y_2 = e^x \chi_n + \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x} dx$$

van de diff.-verg. (15) zijn gebonden door de relatie

$$y'_2 y_1 - y'_1 y_2 = C \frac{e^x}{x},$$

waarin C een constante. Dus, na substitutie van y_1 en y_2,

$$x(\varphi_n \chi'_n - \varphi'_n \chi_n + \varphi_n \chi_n) + \varphi_n^2 = C = 1, \quad . \quad . \quad (66)$$

zooals uit het geval $x = 0$ blijkt. Of ook

$$\frac{dP}{dx} + P = \frac{1}{x \varphi_n^2} - \frac{1}{x},$$

waarin $\qquad P = \frac{\chi_n}{\varphi_n}.$

Deze vergelijking komt eigenlijk reeds op bl. 29 voor in den vorm

$$\frac{1}{x \varphi_n^2} = \frac{1}{x} + \sum_1^n \frac{A_i}{(x-\alpha_i)^2} + \sum_1^n \frac{B_i}{x-\alpha_i}.$$

Immers is $\quad B_i = - A_i, \; \frac{\chi_n}{\varphi_n} = P = - \sum_1^n \frac{A_i}{x - \alpha_i}$

en dus

$$\frac{dP}{dx} = \sum_1^n \frac{A_i}{(x-\alpha_i)^2}.$$

De algemeene oplossing is, zoo k een willekeurige constante voorstelt:

$$P e^x = k + \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{1}{x \varphi_n^2} - \frac{1}{x} \right) e^x \, dx,$$

waaruit volgt

$$\psi_n = k \varphi_n + \varphi_n \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x \varphi_n^2} dx.$$

Daar nu $\psi_n(-\infty) = 0$ moet zijn, is $k = 0$.

Eindelijk kan de oplossing (59) gevonden worden door een methode, die van algemeene toepassing is op die diff.-vergelijkingen der tweede orde, waarbij de vierkantsvergelijking in m — Vergelijk § 4, bl. 9 — geen twee verschillende wortels heeft, dus geen twee verschillende reeksen of polynomia levert. Men vergelijke Forsyth's Diff. Equations, Ex. 2 van bl. 137. Zij $y = u \varphi_n + w$ de tweede oplossing der diff.-verg. (15), waarin u en w twee nader te bepalen functiën van x. Substitutie van y, y' en y'' in (15) geeft een lange diff-verg., die men vereenvoudigt door de opmerking, dat φ_n ook oplossing is, zoodat de termen met u wegvallen, en door de termen met φ_n ook gelijk aan nul te stellen, d. i. u te laten voldoen aan de verg.

$$x u'' + (1 - x) u' = 0.$$

De oplossing hiervan is

$$u = C_1 + C \int \frac{e^x}{x} dx,$$

waarin C en C_1 willekeurige constanten.

Er blijft nu een diff.-verg. der 2e orde in w over, die men door de substitutie $w = C e^x \chi_n$ over doet gaan in

$$x \chi''_n + (1 + x) \chi'_n + (n + 1) \chi_n + 2 \varphi'_n = 0. \quad . \quad . \quad (67)$$

Is χ_n uit deze verg. als polynomium of reeks gevonden — natuurlijk zoekt men slechts een particuliere oplossing — dan is de gevraagde algemeene oplossing der verg. (15)

$$y = C_1 \varphi_n + C \varphi_n \int \frac{e^x}{x} dx + C e^x \chi_n,$$

of, in de hier gebruikte notatie,

$$y = C_1 \varphi_n + C \psi_n.$$

§ 22. In de tweede editie van FORSYTH's Differential Equations komen twee vergelijkingen voor, waarvan (15) een bijzonder geval is. De eerste (F. bl. 184),

$$x y'' + (m + n + \alpha x + \beta x) y' + (m\beta + n\alpha + \alpha\beta x) y = 0,$$

heeft tot particuliere oplossingen

$$y_1 = e^{-\alpha x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-1} \{x^{-n} e^{x(\alpha - \beta)}\}$$

en

$$y_2 = e^{-\beta x} \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} \{x^{-m} e^{x(\beta - \alpha)}\}.$$

Daar α, β, m en n hier resp. 0, -1, $-n$ en $1+n$ of -1, 0, $1+n$ en $-n$ zijn, worden de beide particuliere oplossingen

$$y_1 = e^x \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^n e^{-x}) = n!\, \varphi_n(x) \qquad \text{[Cf. (8)]}$$

en

$$y_2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-(n+1)} (x^{-(n+1)} e^x),$$

waarvoor men, bij behoorlijke bepaling der constanten — zie verg. (63) —, $\psi_n(x)$ mag schrijven.

De tweede (F. bl. 236),

$$(a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x) y' + (a_0 + b_0 x) y = 0,$$

heeft onder de voorwaarde

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = b_2^2$$

een particuliere oplossing van den vorm

$$y = \int_p^q e^{ux}\, V\, du,$$

waarin $$log\,(\mathrm{V\,U}) = \int \frac{a_2\,u^2 + a_1\,u + a_0}{\mathrm{U}}\,du$$

en

$$\mathrm{U} = b_2\,u^2 + b_1\,u + b_0,$$

terwijl p en q bepaald worden door de conditie, dat voor $u = p$ en $u = q$ $e^{ux}\,\mathrm{V\,U} = 0$ moet zijn. [1])

In verg. (15) hebben a_0, b_0, a_1, b_1, a_2 en b_2 de waarden n, 0, 1, -1, 0 en 1, zoodat aan de voorwaarde

$$a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = b_2^2$$

voldaan is. U is hier $u^2 - u$, en dus is

$$log\,(\mathrm{V\,U}) = \int \frac{u + n}{u^2 - u}\,du$$

of

$$\mathrm{V} = \frac{(u-1)^n}{u^{n+1}},$$

zoodat de oplossing dezen vorm aanneemt:

$$y = \int_{-\infty}^{1} \frac{(u-1)^n}{u^{n+1}}\,e^{ux}\,du,$$

welke vorm door de substitutie $ux = z$ onmiddellijk in (64) overgaat.

§ 23. De formule (64) mag gedifferentieerd worden, zoo men slechts rekening houdt met de discontinuiteit der functie onder het integraalteeken voor $z = 0$ en x positief, en met het feit, dat één der grenzen ∞ is. Wat het laatste betreft, gemakkelijk is aan te toonen — vergelijk JORDAN, Cours d'analyse II, p. 160 — dat

$$\lim_{p=\infty} \left[\int_{-\infty}^{-p} \frac{e^z\,(z-x)^{n-1}}{z^{n+1}}\,dz \right] = 0$$

is. Het eerste lid dezer vergelijking toch wordt, daar $z > p$ is, grooter, als men er voor in de plaats stelt

$$\lim_{p=\infty} \left[\frac{1}{p} \int_{-\infty}^{-p} \frac{e^z\,(z-x)^{n-1}}{z^n}\,dz \right] = \lim_{p=\infty} \frac{1}{p}\,\psi_{n-1}(-p),$$

en dat $\psi\,(-\infty) = 0$ is, is reeds op bl. 31 bewezen.

---

[1]) Zie SPITZER, Studien über lineare Differentialgl. Wien 1860.

Wat nu de discontinuiteit aangaat, voor positieve waarden van x is $\psi_n(x)$ door de principale waarde van den integraal gedefinieerd:

$$\psi_n(x) = \lim_{\varepsilon = 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^z (z-x)^n}{z^{n+1}} dz + \int_{+\varepsilon}^{x} \frac{e^z (z-x)^n}{z^{n+1}} dz \right].$$

Deze beide stukken bevatten geen discontinuiteiten; zij zelf en dus ook hun som mogen gedifferentieerd worden. Voert men de differentiatie van (64) uit, dan vindt men

$$\psi'_n(x) = -\frac{n}{x} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z^{n+1}} (z-x)^{n-1} [z-(z-x)]\, dz =$$

$$= -\frac{n}{x} \psi_{n-1}(x) + \frac{n}{x} \psi_n(x)$$

of $$x \psi'_n = n(\psi_n - \psi_{n-1}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Deze eigenschap is analoog met de formule (19). Voor φ_n en ψ_n geldt bovendien dezelfde diff.-verg., *zoodat het stel formules (15) tot (24) ook op ψ_n van toepassing is.*

In 't bijzonder releveer ik de recurrente betrekking

$$(n+1)\psi_{n+1} - (2n+1-x)\psi_n + n\psi_{n-1} = 0, \quad . \quad (69)$$

die nu, met behulp van (59), ook voor χ_n dezelfde recurrente betrekking oplevert:

$$(n+1)\chi_{n+1} - (2n+1-x)\chi_n + n\chi_{n-1} = 0. \quad . \quad (70)$$

Het polynomium χ_n is van graad $n-1$; χ_1 is dus een constante, die krachtens de formule (65) de waarde 1 moet hebben. Met behulp van (70) vindt men nu:

$$\left.\begin{aligned} \chi_1 &= 1 \\ \chi_2 &= \frac{1}{2}(3-x) \\ \chi_3 &= \frac{1}{6}(11 - 8x + x^2) \\ \chi_4 &= \frac{1}{24}(50 - 58x + 15x^2 - x^3) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

enz.,

terwijl door middel der formule (65) voor de coefficienten van

$$\chi_n = k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + k_{n-3} x^{n-3} + \dots + k_1 x + k_0$$

gevonden wordt:

$$\left.\begin{aligned}
k_{n-1} &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!\,n} \\
k_{n-2} &= (-1)^{n-2} \frac{n+1}{(n-2)!\,n} \\
k_{n-3} &= (-1)^{n-3} \frac{n^3 - n - 2}{(n-3)!\,n\,(2n-2)} \\
k_{n-4} &= (-1)^{n-4} \frac{2n^5 - 5n^4 + n^3 - 7n^2 + 3n + 18}{(n-4)!\,n\,(2n-3)(2n-2)(n-1)}
\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

enz.

§ 24. De diff.-verg. (65) en de recurrente betrekking (70) eindelijk geven voor χ_n een dergelijk stel eigenschappen, als in § 5 voor φ_n gevonden zijn, en die ik hier zonder bewijs nederschrijf:

$$\left.\begin{aligned}
&(x-n)\,\chi_n + n\,\chi_{n-1} + x\,\chi'_n + \varphi_n = 0, \\
&\chi_n = \chi'_{n-1} - \chi'_n - \frac{1}{n}\,\varphi'_n, \\
&n\,\chi_{n-1} + n\,\chi'_n + (x-n)\,\chi'_{n-1} + \varphi'_n + \varphi_{n-1} = 0, \\
&x\,\chi'_n + \varphi_n = (n+1)(\chi_{n+1} - \chi_n), \\
&\frac{x-2n-1}{x-n}(x\,\chi'_n + \varphi_n) = (n+1)(\chi_{n+1} + n\,\chi_{n-1}).
\end{aligned}\right\} \quad (73)$$

De coefficienten van χ_n,

$$k_0,\ k_1,\ \dots\ k_{n-1},$$

zijn afwisselend positief en negatief; k_0 is steeds positief. Het bewijs dezer stelling wordt, door de sluitrede van n op $n+1$, getrokken uit de vierde formule van (73),

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{x}{n+1}\,\chi'_n + \frac{1}{n+1}\,\varphi_n,$$

in verband met den vorm van φ_n, en van b.v. χ_2 en χ_3. Gevolg er van is, dat de rij der Sturmsche functiën

$$\chi_n,\ \chi_{n-1}, \dots\ \chi_0$$

geen variaties vertoont voor $x=0$, en $n-1$ voor $x=+\infty$. Alle wortels van χ_n zijn derhalve reëel en positief.

§ 25. De functie χ_n is op de volgende wijze in φ_n uit te drukken:

$$\chi_n(x)=\int_0^\infty e^{-z}\frac{\varphi_n(z)-\varphi_n(x)}{x-z}\,dz. \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Immers levert $\varphi_n(z)-\varphi_n(x)$ bij deeling door $x-z$ een polynomium op, dat zoowel in x als in z van graad $n-1$ is. Daar

$$\int_0^\infty e^{-z}\,z^k\,dz=k!$$

is, wordt χ_n een polynomium in x van graad $n-1$.

De formule (74) is dus bewezen — vergelijk het geval van π_n in § 20 — zoo het tweede lid blijkt te voldoen aan de diff.-verg. (65). Ik schrijf deze in den vorm

$$\frac{d}{dx}(x\,e^x\,\chi'_n)+(n+1)\,e^x\,\chi_n+2\,e^x\,\varphi'_n=0\,. \quad . \quad (75)$$

Stelt men in (74) $x=z+t$, dan is

$$e^x\,\chi_n=-\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}\left[\varphi_n(x)-\varphi_n(x-t)\right]dt$$

dus

$$xe^x\chi'_n=e^x-e^x\varphi_n(x)+x\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}\left[\varphi_n(x)-\varphi_n(x-t)-\varphi'_n(x)+\varphi'_n(x-t)\right]dt$$

en, na eenige herleiding,

$$\frac{d}{dx}(x\,e^x\,\chi'_n)+(n+1)\,e^x\,\chi_n+2\,e^x\,\varphi'_n=$$

$$=-n\,e^x+\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}\left[-n\,\varphi_n(x)+n\,\varphi_n(x-t)-\varphi'_n(x)+\varphi'_n(x-t)+\right.$$

$$\left.+x\,\varphi'_n(x)-x\,\varphi'_n(x-t)-x\,\varphi''_n(x)+x\,\varphi''_n(x-t)\right]dt=$$

$$=-n\,e^x+\int_{-\infty}^x e^t\left[\varphi''_n(x-t)-\varphi'_n(x-t)\right]dt=-n\,e^x+n\,e^x=0.$$

Immers is

$$\int_{-\infty}^{x} e^t \varphi''_n (x-t)\, dt = -\varphi'_n(0)\, e^x + \int_{-\infty}^{x} e^t \varphi'_n (x-t)\, dt.$$

Ook ψ_n is nu anders voor te stellen.

Daar nl. de integraal $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z}\, dz$ zeer gemakkelijk wordt getransformeerd in $e^x \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{x-z}\, dz$, geeft de substitutie van (74) in (59):

$$\psi_n(x) = e^x \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{x-z} \varphi_n(z)\, dz . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

De formule (74) geeft, bij directe integratie voor het geval $x = 0$:

$$\chi_n(0) = n - \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{3}\binom{n}{3} - \frac{1}{4}\binom{n}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = k_0.$$

Zoo vindt men, door (74) te differentieeren naar x, en vervolgens het geval $x = 0$ over z te integreeren:

$$\chi'_n(0) = -\frac{1}{1.2}\binom{n}{2} + \frac{1}{2.3}\binom{n}{3} - \frac{1}{3.4}\binom{n}{4} - \ldots = k_1,$$

vervolgens

$$\frac{1}{1.2}\chi''_n(0) = +\frac{1}{1.2.3}\binom{n}{3} - \frac{1}{2.3.4}\binom{n}{4} + \frac{1}{3.4.5}\binom{n}{5} + \ldots = k_2,$$

. . . .

Een aanvulling van (72).

Deze waarden kunnen gemakkelijk geverifieerd worden door de vierde formule van (73), die na differentiatie voor $x = 0$ de betrekkingen geeft

$$\left.\begin{array}{l} (n+1)\,\chi_{n+1}(0) = (n+1)\,\chi_n(0) + \varphi_n(0) \\ (n+1)\,\chi'_{n+1}(0) = (n+2)\,\chi'_n(0) + \varphi'_n(0) \\ (n+1)\,\chi''_{n+1}(0) = (n+3)\,\chi''_n(0) + \varphi''_n(0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots \quad (77)$$

Eindelijk geeft (60) de relatie

$$\chi_n(0) = -\varphi_n(0) \sum_1^n \frac{A_i}{-\alpha_i} = \sum_1^n \frac{A_i}{\alpha_i} \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

§ 26. Het *polynomium* χ_n moet op deze wijze geschreven kunnen worden:

$$\chi_n = a_0 + \sum_1^{n-1} a_i \varphi_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

Differentieert men tweemaal, en substitueert men χ_n, χ'_n en χ''_n in de diff.-verg. (65), dan vindt men

$$(n+1) a_0 + \sum_1^{n-1} a_i \{(n+1) \varphi_i + (1+x) \varphi'_i + x \varphi''_i\} + 2 \varphi'_n = 0,$$

of, met behulp van (33),

$$(n+1) a_0 + \sum_1^{n-1} a_i \{(n+1) \varphi_i + (1+x) \varphi'_i + x \varphi''_i\} = 2 \sum_0^{n-1} \varphi_i.$$

$x \varphi''_i$ is door de diff.-verg. (15) hieruit te elimineeren, terwijl de formule (19) de verg. ten slotte doet overgaan in de identiek te vervullen voorwaarde

$$(n+1) a_0 + \sum_1^{n-1} [\{(n+i+1) a_i - 2\} \varphi_i - 2 a_i i \varphi_{i-1}] = 2,$$

waaruit men vindt:

$$\left.\begin{aligned} (n+1) a_0 &= 2 + 2 a_i \\ (n+i+1) a_i &= 2 + 2 (i+1) a_{i+1} \\ a_{n-1} &= \frac{1}{n}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

zoodat

$$a_{n-2} = \frac{2}{n}$$

$$a_{n-3} = \frac{3n-4}{n(n-1)}$$

$$a_{n-4} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

$$a_{n-5} = \frac{5n^2 - 25n + 32}{n(n-1)(n-2)}$$

$$a_{n-6} = \frac{2(3n^2 - 19n + 32)}{n(n-1)(n-2)},$$

enz., en b. v.

$$\chi_4(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \varphi_1(x) + \frac{1}{2} \varphi_2(x) + \frac{1}{4} \varphi_3(x)$$

is. Daar in (80) a_{n-1}, n en i positieve grootheden zijn, hebben alle a's positieve waarden.
Uit (79) en (32) volgt nog

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-x}\chi_m\varphi_n\,dx = 0 \text{ voor } m \leqq n,\\ \text{uit (80)}\quad &\int_\infty^0 e^{-x}\chi_{n+1}\varphi_n\,dx = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (81)$$

§ 27. De int.-log. in verg. (59) heeft een oneindig element voor $z = 0$, zoo x positief is. Ik heb daarom x door $-x$ vervangen en ook de integraalvariabelen van teeken veranderd:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz = e^{-x}\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)} - \frac{1}{\varphi_n(-x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz. \quad (82)$$

De beide integralen worden nu niet meer, voor x positief, oneindig. De functie $\varphi_n(-z)$ heeft slechts positieve termen, die ik alle kleiner maak, door de binomiaal-coefficienten weg te laten. Dan is dus

$$\varphi_n(-x) > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

of

$$\left|\,\varphi_n(-x)\,\right|_{n=\infty} > e^x,$$

derhalve

$$\left|\frac{1}{\varphi_n(-x)}\right|_{n=\infty} < e^{-x},$$

d. i. eindig. Verder is

$$\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz = \int_x^A \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz + \int_A^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz,$$

zoo A voldoet aan $x < A < \infty$. Uit $z < A$ (in den eersten integraal) of $\frac{z-x}{z} < \frac{A-x}{A}$ (men herinnere zich, dat x positief is) volgt

$$\int_x^A \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz < \left(\frac{A-x}{A}\right)^n \int_x^A \frac{e^{-z}}{z}\,dz.$$

Hoe groot dus A ook is, $\int_x^A \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz$ kan door den factor $\left(\frac{A-x}{A}\right)^n$ zoo klein gemaakt worden, als men wil; de factor $\int_x^A \frac{e^{-z}}{z}\,dz$ nl., het verschil van twee integraal-logarithmen, blijft eindig. In den tweeden integraal is

$$\frac{z-x}{z} < 1 \quad \text{en} \quad z > A,$$

dus

$$\int_A^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz < \frac{1}{A}\int_A^\infty e^{-z}\,dz,$$

d. i.

$$< \frac{1}{A\,e^A},$$

in absolute waarde. Ook deze term kan dus willekeurig dicht tot nul naderen, [1]) zoodat ten slotte

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{1}{\varphi_n(-x)}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n}{z^{n+1}}\,dz\right] = 0$$

is. De breuk $\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ heeft dus voor $n=\infty$ den int.-log. $e^x\int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz$ tot limiet.

Aan den anderen kant voldoen χ_n en φ_n aan dezelfde recur-

---

[1]) Dit bewijs is ontleend aan een verhandeling van LAGUERRE over den int.-log. (Bull. de la Soc. Math. de France, T. VII p. 76). 't Komt mij voor, dat hij zich van den factor $\frac{1}{\varphi_n(-x)}$ wat al te gemakkelijk afmaakt, door eenvoudig te zeggen: „Je ferai observer d'abord que le facteur $\frac{1}{\varphi_n(-x)}$ tend vers zéro."

rente betrekking, zoodat $\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ als n^{de} naderingsbreuk beschouwd kan worden van een kettingbreuk

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \text{ enz.}}},$$

waarin dan

$$a_{n+1} = \frac{2n+1+x}{n+1} \text{ en } b_{n+1} = -\frac{n}{n+1}.$$

Uit de waarden voor $\chi_1(-x)$ en $\varphi_1(-x)$ volgt bovendien

$$\frac{a_0\, a_1 + b_1}{a_1} = \frac{1}{1+x},$$

zoodat $a_0 = 0$ en $b_1 = 1$ is.

$\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ is dus naderingsbreuk van de kettingbreuk

$$\cfrac{1}{1+x-\cfrac{1}{3+x-\cfrac{4}{5+x-\cfrac{9}{7+x-\cfrac{16}{9+x-\text{ enz.}}}}}}, \quad . \quad (83)$$

welke kettingbreuk nu in nauw verband moet staan met den int.-log.

§ 28. Dit verband komt in deze paragraaf nog duidelijker aan het licht.

Herhaalde partieele integratie van den int.-log. $\int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz$ geeft:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-z}}{z}\,dz = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \ldots + (-1)^m \frac{(m-1)!}{x^m}\right) +$$

$$+ (-1)^m\, m! \int_x^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z^{m+1}} = e^{-x}\,\frac{S}{M} + (-1)^m\, m! \int_x^\infty \frac{e^{-z}\,dz}{z^{m+1}}. \quad (84)$$

M is van graad m, S van graad $m-1$. In het verschil

van $\frac{S}{M}$ met de n^{de} *naderingsbreuk* $\frac{T}{N} = \frac{T}{C_0 + C_1 x + .. + C_n x^n}$ mogen geen termen met x^{-1}, x^{-2}, ... x^{-n} voorkomen. Uit dezen eisch volgt het stel voorwaarden

$$\left.\begin{array}{l} C_0 \quad -C_1 1! + C_2 2! \quad -C_3 3! \quad + .. + (-1)^n C_n n! \quad = 0 \\ C_0 1! \quad -C_1 2! + C_2 3! \quad -C_3 4! \quad + .. + (-1)^n C_n (n+1)! = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_0 (n-1)! - C_1 n! + C_2 (n+1)! - C_3 (n+2)! + .. + (-1)^n C_n (2n-1)! = 0, \end{array}\right\} \quad (85)$$

welke vergelijkingen door de formule

$$\int_{-\infty}^{0} e^x x^r \, dx = (-1)^r r!$$

overgaan in

$$\left.\begin{array}{l} \int_{-\infty}^{0} e^x \mathrm{N} \, dx = 0 \\ \int_{-\infty}^{0} e^x x \mathrm{N} \, dx = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \int_{-\infty}^{0} e^x x^{n-1} \mathrm{N} \, dx = 0 \end{array}\right\} \text{ d. i. } \int_{-\infty}^{0} e^x x^k \mathrm{N} \, dx = 0 \text{ voor } k < n.$$

Uit § 8 volgt nu $N = C \varphi_n(-x)$. De naderingsbreuk van de reeks $\frac{S}{M}$ heeft dus $\varphi_n(-x)$ tot noemer, op een' constanten factor na. Daar de teller, blijkens den vorm $\frac{S}{M}$ van graad $(n-1)$ is, en overigens teller en noemer van een nad. breuk aan dezelfde recurrente betrekking moeten voldoen, moet $\chi_n(-x)$, behoudens een' constanten factor, die teller zijn, zoodat $\frac{S}{M}$ tot nad. breuk $k \frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ heeft; een bijzonder geval leert, dat $k = 1$ gesteld moet worden.

§ 29. Het resultaat kan nu aldus worden samengevat:

$\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$, n^{de} nad. breuk der kettingbreuk

$$\cfrac{1}{1+x-\cfrac{1}{3+x-\cfrac{4}{5+x-\text{ enz.}}}},$$

is tevens nad. breuk van $e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots.\right)$,

welke reeks blijkens (84) nauw met den int.-log. in verband staat. Ofschoon nu deze reeks *divergeert*, *convergeeren* de nad. breuken $\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$, en wel tot $e^x\int_x^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz$, zoodat men recht heeft tot het besluit: $e^{-x}\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ is nad. breuk van den int.-log.

In de boven aangehaalde verhandeling (p. 72) gaat LAGUERRE van den int.-log. uit, definieert $\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ als n^{de} nad. breuk van $\frac{S}{M}$, leidt dan door de eigenschappen der nad. breuken een vergelijking af, overeenkomende met (66) en vindt daaruit de diff.-verg. (15), waaraan φ_n en ψ_n voldoen moeten.

Voor ψ_n wordt vervolgens ook de vorm (64) gevonden, en daaruit de recurrente betrekking (70), die nu ook voor φ_n en χ_n gelden moet; ook de integraal-eigenschap wordt genoemd. Van ondergeschikt belang is, dat LAGUERRE voortdurend met een $f(x)=x!\,\varphi_n(-x)$ werkt.

Voor $x=1$ worden de nad. breuken van $e\int_1^\infty\frac{e^{-z}}{z}dz$

$$\frac{1}{2},\ \frac{4}{7},\ \frac{20}{34},\ \frac{124}{209},\ \frac{920}{1546},\ \frac{7940}{13327},\ \frac{78040}{130922},\ \frac{859580}{1441729},\ldots$$

of

$$
\begin{array}{l}
0.5000\ldots \\
0.5714\ldots \\
0.5882\ldots \\
0.5933\ldots \\
0.5951\ldots \\
0.5958\ldots \\
0.5961\ldots \\
0.5962\ldots
\end{array}
$$

enz.

De werkelijke waarde is 0.5963 . .

HOOFDSTUK III.

AANVERWANTE FUNCTIËN.

§ 30. De definitie van $\varphi_n(x)$ in § 2 vereischte de voorwaarde $v < 1$. Is $v > 1$, dan kan men $\frac{1}{1-v}\, e^{-\frac{xv}{1-v}}$ ontwikkelen naar opklimmende machten van $\frac{1}{v}$. Ik definieer nu den negatieven coefficient van v^{-n} als $\varphi_{-n}(x)$:

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi_{-n}(x)}{v^n} = \frac{1}{v-1}\, e^{-\frac{xv}{1-v}} = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{v}}\, e^{\frac{x}{1-\frac{1}{v}}} \; . \quad . \quad (86)$$

De ontwikkeling van

$$\frac{1}{v}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{v}} + \frac{x}{\left(1-\frac{1}{v}\right)^2} + \frac{x^2}{2!\left(1-\frac{1}{v}\right)^3} + \cdots\right),$$

die nu voor $v > 1$ geldig is, wat ook x zij, geeft

$$\varphi_{-n}(x) = 1 + nx + \frac{x^2}{2!}\,\frac{n(n+1)}{2!} + \frac{x^3}{3!}\,\frac{n(n+1)(n+2)}{3!} + \ldots, \text{ad inf.} \quad (87)$$

Noemt men den k^{den} term dezer reeks u_k, dan is

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{x(n+k)}{(k+1)^2},$$

zoodat de reeks voor alle eindige waarden van x en n convergeert.

§ 31. Stelt men $\frac{1}{v} = t$, dan is (86) ook aldus te schrijven:

$$\sum_1^\infty \varphi_{-n}(x)\, t^n = \frac{t}{1-t}\, e^{\frac{x}{1-t}} = \frac{t}{1-t}\, e^x\, e^{\frac{tx}{1-t}}$$

of

$$e^x \sum_1^\infty \varphi_{-n}(-x)\, t^{n-1} = \frac{1}{1-t}\, e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_0^\infty \varphi_n(x)\, t^n,$$

waaruit deze relatie volgt:

$$e^x\, \varphi_{-n}(-x) = \varphi_{n-1}(x)$$

d. i.

$$\varphi_{-n}(x) = e^x\, \varphi_{n-1}(-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Zoo wordt uit (87) gevonden

$$\varphi_{-1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x,$$

$$\varphi_{-2}(x) = 1 + 2x + 3\,\frac{x^2}{2!} + 4\,\frac{x^3}{3!} + \ldots =$$

$$= e^x(1+x) = e^x\, \varphi_n(-x).$$

Het resultaat (88) is ook te trekken uit de verg. (8):

$$\varphi_n(x) = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}\, x^n) =$$

$$= \frac{e^x}{n!}\left[n! - \frac{(n+1)!}{1!\,1!}\, x + \frac{(n+2)!}{2!\,2!}\, x^2 - \ldots\right] =$$

$$= e^x\left[1 + \binom{-n-1}{1}\frac{x}{1!} + \binom{-n-1}{2}\frac{x^2}{2!} + \binom{-n-1}{3}\frac{x^3}{3!} + \ldots\right] =$$

$$= e^x\, \varphi_{-n-1}(-x),$$

zoodat

$$\varphi_{-n}(x) = e^x\, \varphi_{n-1}(-x).$$

Substitueert men

$$\varphi_{n-1}(-x) = e^{-x}\, \varphi_{-n}(x)$$

in de diff.-verg. (15), hier natuurlijk gewijzigd tot

$$-x\, \varphi''_{n-1}(-x) + (x+1)\, \varphi'_{n-1}(-x) + (n-1)\, \varphi_{n-1}(-x) = 0,$$

dan blijkt $\varphi_{-n}(x)$ aan deze diff.-verg. te voldoen:

$$x\, \varphi''_{-n} + (1-x)\, \varphi'_{-n} - n\, \varphi_{-n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (89)$$

Men had φ_n kunnen definieeren als het polynomium of de reeks, oplossing van de diff.-verg. (15), waarbij dan omtrent n geen enkele onderstelling behoefde gemaakt te worden. Tot nog toe had echter, krachtens de in § 2 gegeven definitie

4

van φ_n, alleen het geval $n =$ een positief, geheel getal recht van bestaan, terwijl voortaan n ook negatief zijn kan; aan de diff.-verg. (89) voldoet dan een reeks, die beschouwd kan worden als de negatieve coefficient van $\frac{1}{v^n}$ in de ontwikkeling van $\frac{1}{1-v} e^{-\frac{xv}{1-v}}$ voor het geval $v > 1$.

Uit (88) volgt nog, dat in de ad inf. voortloopende reeks $e^{-x} \varphi_{-n}(x)$ de coefficienten van x^p ($p \geqq n$) alle nul moeten worden, welke voorwaarde tot tal van betrekkingen aanleiding geeft.

§ 32. Daar de reeks (2) en de diff.-verg. (15) vroeger n positief onderstelden, maar nu ook negatieve waarden van n toelaten, zijn alle eigenschappen van φ_n die uit (2) en (15) volgden, onmiddellijk in eigenschappen voor φ_{-n} om te zetten, eenvoudig door n van teeken te veranderen. Overigens kunnen deze eigenschappen steeds gemakkelijk gecontrôleerd worden door de formule (88). Zoo geldt (38) (§ 11) en alle relaties van § 5. De récurrente betrekking

$$(1-n)\,\varphi_{-n+1} + (2n + x - 1)\,\varphi_{-n} - n\,\varphi_{-n-1} = 0 \quad . \quad (90)$$

is daarvan de belangrijkste. Ze volgt natuurlijk ook uit (24) door daarin (88) te substitueeren. Analoog met § 3 c. verder is

$$\varphi_{-n} = \mathrm{F}\left(n, \beta, 1, \frac{x}{\beta}\right)_{\beta = \infty} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

Enkele andere in die paragraaf voorkomende vormen vereischen echter een wijziging. Zoo vindt men gemakkelijk de formules

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{-n}(x) &= \mathcal{E}\,\frac{e^{\frac{x}{1-t}}}{(1-t)\,((t^n))}, \\ \varphi_{-n}(x) &= \mathcal{E}\,\frac{e^{\pm\frac{x}{t}}(1 \mp t)^{-n}}{t}, \\ \varphi_{-n}(x) &= \mathcal{E}\,\frac{e^{\pm\frac{1}{t}}(1 \mp tx)^{-n}}{t}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

en $$\varphi_{n-1}(-x) = \frac{e^{-x}}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^{n-1}e^{x}),$$

dus $$\left.\begin{aligned}\varphi_{-n}(x) &= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^{n-1}e^{x}) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\,(\mathrm{D}+1)^{n-1}(x^{n-1}).\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (93)$$

Het additie-theorema (49) wordt door toepassing van (88):

$$\begin{aligned}\varphi_{-n}(x+y) &= \varphi_{-n}(x)\,\varphi_{-1}(y) + \varphi_{-n+1}(x)\,\varphi_{-2}(y) + \dots \\ &\dots + \varphi_{-2}(x)\,\varphi_{-n+1}(y) + \varphi_{-1}(x)\,\varphi_{-n}(y) - \\ &- [\varphi_{-n+1}(x)\,\varphi_{-1}(y) + \varphi_{-n+2}(x)\,\varphi_{-2}(y) + \dots \\ &\dots + \varphi_{-1}(x)\,\varphi_{-n+1}(y)]. \quad . \; . \; . \; . \; . \; (94)\end{aligned}$$

Eindelijk leert de formule (42):

$$\varphi_{-n}(x) = e^{x}\,\varphi_{n-1}(-x) = e^{x}\sum_{0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(-1)^{k}\,2^{n-k-1}\,\varphi_{k}(x). \; (95)$$

§ 33. Integraaleigenschappen voor de functie φ_{-n} worden, steeds met behulp van (88), gemakkelijk afgeleid uit de formules (27) en (28). Men vindt:

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\varphi_{-m}(x)\,\varphi_{-n}(x)\,dx &= 0 \text{ voor } m \gtrless n, \\ &= 1 \text{ voor } m = n.\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (96)$$

Analoog met § 6 zijn deze eigenschappen ook af te leiden uit de definitie (86).

De reeksen $$\sum_{1}^{\infty}\varphi_{-n}(x)\,t^{n} = \frac{t}{1-t}\,e^{x}\,e^{\frac{tx}{1-t}}$$

en

$$\sum_{1}^{\infty}\varphi_{-m}(x)\,u^{m} = \frac{u}{1-u}\,e^{x}\,e^{\frac{ux}{1-u}}$$

geven na vermenigvuldiging

$$e^{-x}\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\varphi_{-m}(x)\,\varphi_{-n}(x)\,u^{m}\,t^{n} = \frac{ut}{(1-u)(1-t)}\,e^{\frac{1-ut}{(1-u)(1-t)}x},$$

of

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\varphi_{-m}(x)\,\varphi_{-n}(x)\,u^{m}\,t^{n}\,dx = \frac{ut}{1-ut} = ut + u^{2}t^{2} + u^{3}t^{3} + \dots$$

d. i. $$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,\varphi_{-m}(x)\,\varphi_{-n}(x)\,dx = 0 \text{ of } 1,$$

naarmate $m \gtrless n$ of $m = n$.

Ook volgt uit (27), (28) en (88):

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \varphi_{-m}(x)\,\varphi_{n-1}(-x)\,dx &= 0 \text{ voor } m \gtrless n,\\ &= 1 \text{ voor } m = n.\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (97)$$

En ten slotte:

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0} \varphi_{-n}(x)\,x^m\,dx = 0\\ \text{en}\\ &\int_{-\infty}^{0} \varphi_{-n}(x)\,\omega_m(x)\,dx = 0\end{aligned}\right\} \text{voor } m < n-1. \quad . \quad . \quad (98)$$

Uit de laatste formule volgt, geheel als in § 9, dat de wortels van φ_{-n} alle reëel en negatief zijn. Ook dit resultaat is weer uit (88) te trekken, daar e^x slechts nul wordt voor $x = -\infty$.

Eindelijk overtuigt men zich, analoog met § 10, gemakkelijk van de waarheid van deze stellingen: Tusschen twee opeenvolgende wortels der vergelijking $\varphi_{-n}(x) = 0$ ligt één wortel van $\varphi_{-n+1}(x) = 0$; de verg. $\varphi_{-n}(x) = 0$ heeft één' wortel tusschen nul en -1.

§ 34. De formules (29) en (88) geven recht tot de ontwikkeling

$$x^\mu e^x = \sum_{1}^{\mu+1} A^{\mu}_{-i}\,\varphi_{-i}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

waarin dan A^{μ}_{-i} door de zooeven gevonden integraaleigenschappen bepaald wordt. En wel zal men in § 41 vinden:

$$A^{\mu}_{-i} = (-1)^{\mu+i-1} \binom{\mu}{i-1} \mu!. \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Met behulp van deze formule krijgt

$$\varphi_{-n}(rx) = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i \binom{-n}{i} \frac{x^i r^i}{i!}$$

den vorm

$$\varphi_{-n}(rx) = \sum_{i=0}^{i=\infty} (-1)^i e^{-x} \binom{-n}{i} \frac{r^i}{i!} \sum_{k=0}^{k=i} (-1)^{i+k} i! \binom{i}{k} \varphi_{-k-1}(x) =$$

$$= e^{-x} \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k r^k \varphi_{-k-1}(x) \binom{-n}{k} \sum_{i=0}^{i=\infty} \binom{-n-k}{i} r^i,$$

zooals door vergelijking met § 12 gemakkelijk blijkt.
Of ook, onder de voorwaarde $r < 1$,

$$\varphi_{-n}(rx) = \sum_0^\infty (-1)^k \frac{r^k}{(1+r)^{n+k}} \binom{-n}{k} \varphi_k(-x). \quad . \quad (101)$$

Aan den anderen kant kan men $\varphi_{-n}(rx)$ vervangen door $e^{rx} \varphi_{n-1}(-rx)$, zoodat

$$\varphi_{-n}(rx) = e^{rx} \sum_0^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \varphi_k(x) \frac{r^k}{(1+r)^{k-n+1}} \quad . \quad (102)$$

is. Voor $r = -\frac{1}{2}$ worden deze formules

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{-n}(-\frac{1}{2}x) = 2^n \sum_0^\infty \binom{-n}{k} \varphi_k(-x) \\ \text{en} \\ \varphi_{-n}\left(-\frac{1}{2}x\right) = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{e^x}} \sum_0^{n-1} \binom{n-1}{k} \varphi_k(x). \end{array}\right\} \quad . \quad (103)$$

§ 35. Het resultaat (58) is onafhankelijk van het teeken van n, welke grootheid immers uit de diff.-verg. geëlimineerd is. Dus is ook

$$\psi_{-n}(x) = \varphi_{-n}(x) \int_{+\infty}^{x} \frac{e^x}{x \varphi_{-n}^2} dx, \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

waarin de grens $-\infty$ in $+\infty$ veranderd moest worden. Stelt men de formule (88) in (58) dan komt er

$$\psi_{n-1}(-x) = \varphi_{n-1}(-x) \int_{\infty}^{x} \frac{e^x}{x \varphi_{-n}^2(x)} dx,$$

zoodat

$$\psi_{-n}(x) = e^x \psi_{n-1}(-x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

is. De diff.-verg. voor φ_{-n},

$$x y'' + (1-x) y' - n y = 0,$$

heeft volgens § 22 de beide oplossingen

$$y_1 = e^x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-n} (x^{-n} e^{-x})$$

en

$$y_2 = \left(\frac{d}{dx} \right)^{n-1} (x^{n-1} e^x).$$

Het blijkt, cf. (93), dat y_2, op een' constanten factor na, $= \varphi_{-n}(x)$ is, terwijl de formules (63) en (105) de identiteit van y_1 en ψ_{-n} aantoonen.

Daar φ_n en ψ_n aan hetzelfde stel formules voldoen (§ 23), moet krachtens de vergelijkingen (88) en (105) het gewijzigde stel, dat voor φ_{-n} geldt, ook op ψ_{-n} van toepassing zijn. Uit de relatie

$$\psi_{n-1} = e^x \chi_{n-1} + \varphi_{n-1} \int_{-\infty}^{x} \frac{e^z}{z} dz \quad . \; . \; . \quad (59)$$

is gemakkelijk af te leiden:

$$\psi_{-n}(x) = \chi_{n-1}(-x) + \varphi_{-n}(x) \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-z}}{z} dz, \quad . \quad (106)$$

waaruit blijkt, dat $\frac{\chi_{n-1}(-x)}{\varphi_{-n}(x)}$ als naderingsbreuk van $\int_{\infty}^{x} \frac{e^{-z}}{z} dz$ beschouwd kan worden. Nu is echter de noemer geen polynomium meer, waardoor het karakter van naderingsbreuk wel eenigermate verloren gaat. Ik heb daarom de vele eigenschappen van φ_{-n} en ψ_{-n} (en van een eventueel in te voeren functie χ_{-n}), die nog uit de eerste twee hoofdstukken af te leiden zijn, niet verder nagegaan.

§ 36. De diff.-verg. der hypergeometrische reeks (zie b.v. FORSYTH's Diff. Equations p. 192) laat 24 particuliere oplossingen toe, welk aantal zich in ons geval, waar x door $\frac{x}{\beta}$ vervangen moet worden, en $\beta = \infty$, $\gamma = 1$ te stellen is, beperkt tot deze vier:

1. $$F\left(-m,\beta,1,\frac{x}{\beta}\right),$$

2. $$\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-\beta} F\left(\beta,1+m,1,-\frac{x}{\beta}\right),$$

3. $$\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-\beta} F\left(1+m,-\beta,1,\frac{x}{\beta}\right),$$

4. $$F\left(-m,-\beta,1,-\frac{x}{\beta}\right).$$

De oplossingen 1 en 4 zijn beide $= \varphi_n(x)$. Daar

$$\left|\left(1-\frac{x}{\beta}\right)^{-\beta}\right|_{\beta=\infty} = e^x$$

is, zijn de oplossingen 2 en 3 te schrijven als

$$e^x\left[1-\frac{n+1}{1}x+\frac{(n+1)(n+2)}{2!}\frac{x^2}{2!}-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]=$$

$$= e^x\,\varphi_{-(n+1)}(-x) = \varphi_n(x).$$

Alle 24 oplossingen zijn hier dus terûggebracht tot één enkele, iets, dat geen verwondering kan baren, als men nagaat, dat alle oplossingen combinaties zijn van de twee hoofdoplossingen

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

en $$x^{1-\gamma}\,F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x),$$

en dat deze beide voor $\gamma = 1$ samenvallen.

§ 37. De functie $\alpha = x^k\,\varphi_n^{(k)}(x)$, verwante functie der eerste soort.

Differentieert men de verg. (19) herhaaldelijk, dan vindt men na eenige herleiding

$$x^2\,\varphi''_n = n(n-1)(\varphi_n - 2\,\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}),$$

$$x^3\,\varphi'''_n = n(n-1)(n-2)(\varphi_n - 3\,\varphi_{n-1} + 3\,\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}),$$

. . . .

dus, in symbolische schrijfwijze,

$$\alpha = x^k\,\varphi_n^{(k)}(x) = \binom{n}{k} k!\,(\varphi-1)^k\,\varphi^{n-k}.$$

Zoo wordt . . (107)

$$x^k\,\varphi_{-n}^{(k)}(x) = (-1)^k\binom{-n}{k} k!\,\frac{(\varphi-1)^k}{\varphi^{n+k}}.$$

Daar de functie ψ_n ook aan de verg. (19) voldoet, wordt een verwante functie der tweede soort in dezen vorm verkregen:

$$\left.\begin{aligned} \beta = x^k \psi_n^{(k)}(x) &= \binom{n}{k} k!\,(\psi - 1)^k \psi^{n-k}, \\ \text{en} \qquad x^k \psi_{-n}^{(k)}(x) &= (-1)^k \binom{-n}{k} k!\,\frac{(\psi - 1)^k}{\psi^{n+k}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad (108)$$

Terwijl de functiën $\varphi_n^{(k)}$ en $\psi_n^{(k)}$ aan de verg. (25) voldoen, zijn α en β oplossingen van

$$x^2 y'' - (k + x - 1)\,x\,y' + (xn - 2k)\,y = 0 \quad . \quad (109)$$

Elimineert men $xn - 2k$ uit de vergelijkingen

$$x^2 \alpha'' - (k + x - 1)\,x\,\alpha' + (xn - 2k)\,\alpha = 0$$

en $$x^2 \beta'' - (k + x - 1)\,x\,\beta' + (xn - 2k)\,\beta = 0,$$

dan komt er, geheel als in § 18,

$$\frac{d}{dx} \log(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 1 + \frac{k-1}{x},$$

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = C\,e^x x^{k-1},$$

dus

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \beta\,C \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x x^{k-1}}{\beta^2}\,dx, \\ \text{en} \qquad \beta &= -\,\alpha\,C \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x x^{k-1}}{\alpha^2}\,dx. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

Dergelijke betrekkingen zijn ook voor $x^k \varphi_{-n}^{(k)}$ en $x^k \psi_{-n}^{(k)}$ te vinden.

HOOFDSTUK IV.

REEKSONTWIKKELING NAAR $\varphi_n(x)$.

§ 38. Daar $\varphi_n(x)$ een polynomium is, kan x^μ naar φ's ontwikkeld worden, terwijl dan μ de hoogste index wordt:

$$x^\mu = \sum_0^\mu A_i^\mu \varphi_i(x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

De integraal-eigenschappen van § 6 bepalen de coefficienten A_i^μ in den vorm

$$A_i^\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \varphi_i(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \sum_0^i (-1)^k \frac{x^k}{k!} \binom{i}{k} dx = \mu! \sum_0^i (-1)^k \binom{i}{k} \binom{\mu+k}{k}. \quad (111)$$

Echter ook, met behulp der formule (8):

$$A_i^\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \frac{e^x}{i!} \left(\frac{d}{dx}\right)^i (x^i e^{-x})\, dx = \frac{1}{i!} \int_0^\infty x^\mu d. \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} (x^i e^{-x}).$$

Bij partieele integratie verdwijnt de term

$$x^\mu \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} (x^i e^{-x}),$$

een polynomium $\times\, x^{\mu+1} e^{-x}$, voor de grenzen 0 en ∞. Herhaalde partieele integratie geeft dus

$$A_i^\mu = -\frac{\mu}{i!} \int_0^\infty x^{\mu-1} \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} (x^i e^{-x})\, dx =$$

$$= (-1)^2 \frac{\mu(\mu-1)}{i!} \int_0^\infty x^{\mu-2} \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-2} (x^i e^{-x})\, dx =$$

$$= (-1)^i \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-i+1)}{i!} \int_0^\infty x^{\mu-i} x^i e^{-x} dx$$

of

$$A_i^\mu = (-1)^i \frac{\mu!\,\mu!}{i!\,(\mu-i)!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Van deze formule is al in de paragrafen 6 en 12 gebruik gemaakt.

Mag men aannemen, dat x^μ ook voor $\mu =$ een gebroken naar $\varphi_n(x)$ ontwikkeld kan worden, dan wordt

$$A_i^\mu = (-1)^i \binom{\mu}{i} \Gamma(\mu+1).$$

De vergelijking der beide waarden voor A_i^μ, waarin twee parameters, i en μ, voorkomen, die slechts aan de voorwaarde $i \leqq \mu$ gebonden zijn, geeft tot zeer veel getallen-eigenschappen aanleiding; ik zal hier één er van opnemen. Voor $i = \mu$ vindt men:

$$\sum_0^\mu \frac{(-1)^k}{k!\,k!} \frac{(\mu+k)!}{(\mu-k)!} = (-1)^\mu. \quad \ldots \quad (112)$$

Nemen we b. v. $\mu = 10$, dan wordt

$$1 - \frac{11!}{9!} + \frac{12!}{8!\,2!\,2!} - \frac{13!}{7!\,3!\,3!} + \ldots + \frac{20!}{10!\,10!} =$$

$$= 1 - 110 + 2970 - 34320 + 210210 - 756756 + 1681680 -$$
$$- 2333760 + 1969110 - 923780 + 184756 = 1 = (-1)^{10}.$$

§ 39. De vergelijking (30), geschreven in den vorm

$$A_i^\mu = (-1)^i \mu! \binom{\mu}{i}, \quad \ldots \ldots \quad (113)$$

doet zien, dat de coefficienten A_i^μ in nauw verband staan met de binomiaal-coefficienten, een verband, waaruit natuurlijk de overeenkomst van veel eigenschappen volgt. Zoo ligt onmiddellijk deze eigenschap voor de hand:

$$A_i^\mu = (-1)^\mu A_{\mu-i}^\mu. \quad \ldots \ldots \quad (114)$$

Zoo volgt uit (18)

$$A_i^\mu = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} \varphi_i \, dx = \int_0^\infty x^\mu e^{-x} (\varphi'_i - \varphi'_{i+1}) \, dx.$$

Bij partieele integratie valt de term

$$(\varphi_i - \varphi_{i+1})\, x^{\mu}\, e^{-x}$$

voor de beide grenzen weg, zoodat

$$A_i^{\mu} = -\int_0^{\infty} (\mu\, x^{\;\;-1} - x^{\mu})\, e^{-x}\, (\varphi_i - \varphi_{i+1})\, dx =$$

$$= -\mu\, A_i^{\mu-1} + \mu\, A_{i+1}^{\mu-1} + A_i^{\mu} - A_{i+1}^{\mu}.$$

Derhalve

$$A_i^{\mu} = \mu\, (A_i^{\mu-1} - A_{i-1}^{\mu-1}), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

een resultaat, dat natuurlijk ook uit (113) dadelijk af te leiden is. Stelt men in (115) achtereenvolgens $i = 0, 1, 2, \ldots m$:

$$A_0^{\mu} = \mu\,!$$

$$A_1^{\mu} = \mu\, (A_1^{\mu-1} - A_0^{\mu-1})$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$A_m^{\mu} = \mu\, (A_m^{\mu-1} - A_{m-1}^{\mu-1}),$$

dan komt er door optelling

$$\sum_0^m A_i^{\mu} = \mu\, A_m^{\mu-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

waarin voor $m = \mu$ het tweede lid nul wordt: een bekende eigenschap der binomiaal-coefficienten, welker pendant deze relatie levert:

$$\sum_0^{\mu} (-1)^i A_i^{\mu} = 2^{\mu}\, \mu\,! \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

§ 40. Als uitbreiding van een Vraagstuk van het Genootschap „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven” (Deel V, p. 339), geef ik hier deze curieuse eigenschap der binomiaal-coefficienten:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_0^n (-1)^i \binom{n}{i} (i+\alpha)(i+\beta)\ldots.(i+\lambda) = \\ &= (-1)^n\, n!\left[\frac{1}{2}\, n\,(n+1) + \alpha + \beta + \ldots.\lambda\right], \\ &= (-1)^n\, n!\,, \\ &= 0\,, \end{aligned}\right\} . (118)$$

naarmate het aantal der factoren $(i+\alpha)(i+\beta)\ldots(i+\lambda)$

$n+1$, n of kleiner dan n is. De grootheden α, β, ... λ zijn volmaakt willekeurig. Neemt men b. v.

$$n=6,\ \alpha=2,\ \beta=-\frac{1}{3}\ \gamma=10,\ \delta=\frac{1}{2},\ \varepsilon=0,\ \zeta=-1,$$

dan vindt men

$$0+0+6000-72800+249480-323400+141440=$$
$$=720=(-1)^6\,6!$$

Voor het speciale geval $\alpha=1$, $\beta=2$, ... $\lambda=n$, gaat (118) na deeling door $n!$ over in

$$\sum_0^n(-1)^i\binom{n+i}{n}\binom{n}{i}=\sum_0^n\frac{(-1)^i}{i!\,i!}\,\frac{(n+i)!}{(n-i)!}=(-1)^n,\ .\ (112)$$

een relatie, die ook in § 38 gevonden is. Zijn er $n+1$ factoren, dan is $\lambda=n+1$, zoodat

$$\sum_0^n(-1)^i\binom{n}{i}(i+1)(i+2)\dots(i+n+1)=$$
$$=(-1)^n\,n!\left[\frac{1}{2}\,n\,(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right],$$

d. i.

$$\left.\begin{aligned}&\sum_0^{n-1}(-1)^i\,\frac{(n+i)!}{(n-i)!}\,\frac{(n-i)}{i!\,i!}=(-1)^{n-1}\,n^2,\\ \text{of}\quad&\\ &\sum_0^{n-1}(-1)^i\binom{n+i}{i}\binom{n-1}{i}=(-1)^{n-1}\,n.\end{aligned}\right\}\ .\ (119)$$

Voor $n=7$:

$$7-336+3780-16800+34650-33264+12012=$$
$$=49=(-1)^6\,7^2.$$

Het aantal dezer formules is natuurlijk gemakkelijk uit te breiden. Analoge eigenschappen gelden steeds voor de coefficienten A_i^μ. Zoo blijkt uit (118) onmiddellijk:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_0^\mu A_i^\mu\,(i+\alpha)(i+\beta)\dots(i+\lambda)=\\ &=(-1)^\mu\,\mu!\,\mu!\left[\frac{1}{2}\mu\,(\mu+1)+\alpha+\beta+\dots\lambda\right],\\ &=(-1)^\mu\,\mu!\,\mu!,\\ &=0,\end{aligned}\right\}\ .\ (120)$$

naarmate het aantal factoren $\mu+1$, μ of kleiner dan μ is.

Zoo gaan (112) en (119) na eenige herleiding over in

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{0}^{n} \frac{A_i^n A_n^{n+i}}{(n+i)!} = n! \\ \text{en} \\ &\sum_{0}^{n-1} (-1)^{n+i} \frac{A_i^{n-1} A_n^{n+i}}{(n+i)!} = -n!. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (121)$$

§ 41. Vermenigvuldigt men de vergelijking (29) met e^{-x}, en maakt men gebruik van de betrekking

$$\varphi_{-i}(x) = e^x \varphi_{i-1}(-x),$$

dan vindt men deze ontwikkeling:

$$e^{-x} x^\mu = \sum_0^\mu A_i^\mu \varphi_{-i-1}(-x)$$

of

$$e^x x^\mu = \sum_0^{\mu+1} A_{-i}^\mu \varphi_{-i}(x), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (122)$$

waarin nu

$$A_{-i}^\mu = (-1)^\mu A_{i-1}^\mu = (-1)^{\mu+i-1} \mu! \binom{\mu}{i-1} \quad . \quad (123)$$

is. Natuurlijk zijn, analoog met § 38, de coefficienten A_{-i}^μ, nu men eenmaal weet, dat de ontwikkeling van $e^x x^\mu$ naar $\varphi_{-i}(x)$ mogelijk is, ook door de integraal-eigenschappen van § 33 te vinden:

$$A^\mu_{-i} = \int_{-\infty}^{0} e^x x^\mu e^{-x} \varphi_{-i}(x)\, dx = \frac{1}{(i-1)!} \int_{-\infty}^{0} x^\mu \left(\frac{d}{dx}\right)^{i-1} (x^{i-1} e^x) =$$

$$= (-1)^{i-1} \frac{\mu!}{(\mu-i+1)!\,(i-1)!} \int_{-\infty}^{0} e^x x^\mu\, dx = (-1)^{\mu+i-1} \binom{\mu}{i-1} \mu!.$$

§ 42. In de beide volgende paragrafen voeg ik nog enkele ontwikkelingen bijeen, waarvan men de *mogelijkheid* weet.

Het *polynomium* φ'_n kan naar φ's ontwikkeld worden. Hier wordt

$$A_i = \int_0^\infty e^{-x} \varphi'_n \varphi_i\, dx = \left| e^{-x} \varphi_n \varphi_i \right|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x} \varphi_n \varphi'_i\, dx + \int_0^\infty e^{-x} \varphi_n \varphi_i\, dx.$$

φ'_i is te vervangen door een reeks, geordend naar φ_n, waarin $i-1$ de hoogste index is. Daar $i \leqq n-1$, volgt uit (27), dat de beide integralen verdwijnen. Derhalve

$$A_i = \left| e^{-x} \varphi_n \dot{\varphi}_i \right|_\infty^0 = -1,$$

zoodat

$$\varphi'_n(x) = -\sum_0^{n-1} \varphi_n(x). \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

is, een resultaat, dat § 11 reeds opgeleverd had.

§ 43. De definitie

$$\frac{1}{1-v} e^{-\frac{xv}{1-v}} = \sum_0^\infty \varphi_n(x) v^n \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

sluit in zich, dat ook voor functiën als e^{-tx} de ontwikkeling naar φ_n mogelijk is. Stelt men nl. $t = \frac{v}{1-v}$, dan is

$$e^{-xt} = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2}\varphi_1(x) + \frac{t^2}{(1+t)^3}\varphi_2(x) + \ldots, \quad (124)$$

onder de voorwaarde $\quad mod.\ v < 1,$

of $\quad mod.\ \frac{t}{1+t} < 1.$

Stelt men $\quad t = \varrho\,(cos\,\vartheta + i\,sin\,\vartheta)$

dan gaat deze conditie na eenige herleiding over in

$$\frac{\varrho^2}{1+\varrho^2+2\varrho\, cos\,\vartheta} < 1.$$

Het punt t mag derhalve overal genomen worden in het gebied, dat rechts ligt van de lijn $x + \frac{1}{2} = 0$. Reëele waarden van t moeten dus $> -\frac{1}{2}$ zijn.

Ontleent men aan de definitie (1) alleen de wetenschap, dat de ontwikkeling mogelijk is, dan kunnen natuurlijk de int.-eigenschappen van § 6 de reeks (124) ook opleveren:

$$A_i = \int_0^\infty e^{-xt} \varphi_i(x)\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-x(t+1)}\left(1 - i\,x + \binom{i}{2}\frac{x^2}{2!} + \ldots (-1)^i \frac{x^i}{i!}\right).$$

Daar

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-(t+1)x}\,x^k\,dx = \frac{1}{k!}\frac{k}{t+1}\int_0^\infty e^{-(t+1)x}\,x^{k-1}\,dx = \frac{1}{(t+1)^{k+1}}$$

is, onder de — hier vervulde — voorwaarde: $t+1 =$ positief, heeft men

$$A_i = \frac{1}{t+1}\left(1 - \frac{i}{t+1} + \binom{i}{2}\frac{1}{(t+1)^2} - \ldots (-1)^i \frac{1}{(t+1)^i}\right) =$$

$$= \frac{1}{t+1}\left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^i = \frac{t^i}{(t+1)^{i+1}}.\ ^{1)}$$

Voor $t = 1$ wordt de reeks (124)

$$e^{-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2^3}\varphi_2(x) + \ldots = \varphi_{-1}(-x),$$

zooals ook uit (95) blijkt.

Is n nl. niet een geheel getal, grooter dan 1, dan is het tweede lid van (95) geen polynomium, maar een reeks:

$$\varphi_{-n}(x) = e^x\Big\{\varphi_0(x)\,2^{n-1} - (n-1)\,\varphi_1(x)\,2^{n-2} + $$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\varphi_2(x)\,2^{n-3} - \ldots\Big\},$$

of

$$e^{-x}\varphi_{-n}(x) = \varphi_{n-1}(-x) = 2^{n-1} - (n-1)\,\varphi_1(x)\,2^{n-2} +$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\varphi_2(x)\,2^{n-3} - \ldots,$$

d.i., voor $n = 0$,

$$\varphi_{-1}(-x) = \frac{1}{2} + \frac{\varphi_1(x)}{2^2} + \frac{\varphi_2(x)}{3^2} + \ldots.$$

§ 44. De definitie van § 31,

$$\sum_1^\infty \varphi_{-n}(x)\,t^n = \frac{t}{1-t}e^{\frac{x}{1-t}}\ (mod.\ t < 1),$$

levert, onder de voorwaarde $u > \frac{1}{2}$, de reeks

---

[1]) **Deze ontwikkeling komt ook bij LAGUERRE (Bull. de la Soc. math. de France, Tome VII, p. 79) voor.**

$$e^{xu} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(u-1)^{n-1}}{u^n} \varphi_{-n}(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

De formules (124) en (125), met de voorwaarden $t > -\frac{1}{2}$ en $u > \frac{1}{2}$, vullen elkander juist aan, zoodat voor elke waarde van t de functie e^{tx} naar $\varphi_n(x)$ of $\varphi_{-n}(x)$ ontwikkeld kan worden. Het geval $t = \frac{1}{2}$ maakt een uitzondering; echter is

$$e^{\frac{1}{2}x} = e^x e^{-\frac{1}{2}x},$$

dus, volgens (124),

$$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{2}{3} e^x \left[1 + \frac{1}{3} \varphi_1(x) + \frac{1}{3^2} \varphi_2(x) + \frac{1}{3^3} \varphi_3(x) + \ldots \right].$$

Uit (125) volgt nog

$$e^x = \varphi_{-1}(x),$$

cf. § 31, dus ook

$$e^{ux} = \varphi_{-1}(ux).$$

Voor $u > \frac{1}{2}$ geldt derhalve de verg.

$$\varphi_{-1}(ux) = \frac{1}{u} \left[\varphi_{-1}(x) + \frac{u-1}{u} \varphi_{-2}(x) + \ldots . \right].$$

De ontwikkeling (125) kan ook uit de integraal-eigenschappen van § 33 afgeleid worden. Wil dan echter een stuk als $\frac{x^k}{u-1} e^{x(u-1)}$, dat bij de partieele integratie optreedt, nul worden, dan moet $u > 1$ zijn, zoodat dan de formules (124) en (125) niet meer aansluiten, maar voor $\frac{1}{2} \leqq u < 1$ twijfel zouden overlaten. Daarom prefereer ik de afleiding van (125) uit de definitie $\varphi_{-n}(x)$.

Overigens kan men e^{xu}, waarin $\frac{1}{2} < u < 1$ is, in den vorm $e^x e^{x(u-1)}$ door middel van (124) behandelen.

§ 45 De vergelijkingen (2) en (29) vertoonen een eigenaardige reciprociteit, die nog beter aan den dag treedt, door $i!\,\varphi_i(x)$ symbolisch te vervangen door Φ^i.

(2) wordt dan:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^n &= \sum_0^n (-1)^i \frac{n!}{i!} \binom{n}{i} x^i \\ x^n &= \sum_0^n (-1)^i \frac{n!}{i!} \binom{n}{i} \Phi^i. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (126)$$

en (29):

Hieruit volgt deze stelling [1]: Als een naar opklimmende machten van x gerangschikte functie naar φ_n ontwikkeld kan worden, zoodat symbolisch

$$f(x) = \mathrm{F}(\Phi)$$

is, dan is ook

$$f(\Phi) = \mathrm{F}(x).$$

Φ^k is hierin steeds te vervangen door $k!\,\varphi_k(x)$.

Zoo volgt uit de definitie van $\varphi_n(x)$:

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{tx}{1-t}} = \sum_0^\infty \frac{t^n \Phi^n}{n!} = e^{t\Phi}$$

of

$$\frac{1}{1+t} e^{\frac{tx}{1+t}} = e^{-t\Phi}.$$

Nu moet omgekeerd ook

$$\frac{1}{1+t} e^{\frac{t\Phi}{1+t}} = e^{-tx}$$

zijn, dus

$$e^{-tx} = \frac{1}{1+t}\left(1 + \frac{t\Phi}{1+t} + \frac{1}{2!}\frac{t^2\Phi^2}{(1+t)^2} + \ldots\ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{1+t}\left(1 + \frac{t}{1+t}\varphi_1(x) + \frac{t^2}{(1+t)^2}\varphi_2(x) + \ldots\ldots\right),$$

de vergelijking (124).

§ 46. Halphén [2]) tracht een functie te ontwikkelen in dezen vorm:

$$f(x) = \sum_1^\infty \mathrm{C}_k\, \varphi_{k-1}\left(\frac{x}{k\beta}\right).$$

---

[1]) Laguerre, t. a. p. bl. 81.

[2]) C. R. xcv p. 629, en Bull. de la Soc. math. de France, Tome X p. 67.

In de onderstelling, dat de ontwikkeling mogelijk is, vindt hij:

$$C_k = \frac{1}{k!}\int_0^\infty f(k\beta x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(x^k e^{-x})\, dx. \quad . \quad (127)$$

Ik weet niet, hoe HALPHÉN tot deze uitdrukking gekomen is. Waarschijnlijk niet langs den weg, dien ik hier inslaan zal, gebruik makende van de formules van § 12. Ik integreer de beide leden der vergelijking

$$f(n\beta x) = C_1 + \sum_2^\infty C_k\, \varphi_{k-1}\left(\frac{nx}{k}\right). \quad . \quad . \quad (128)$$

tusschen de grenzen 0 en ∞, na vermenigvuldiging met den factor

$$e^{-x}\{\varphi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}(x^n e^{-x}).$$

Daar nu

$$\varphi_{k-1}\left(\frac{nx}{k}\right) = \sum_0^{k-1} B_i^{k-1}\, \varphi_i(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

is, verdwijnen alle termen van (128), die $k < n$ hebben. De term met $k = n$,

$$C_n \int_0^\infty e^{-x}\, \varphi_{n-1}\, (\varphi_{n-1} - \varphi_n)\, dx,$$

reduceert zich tot

$$C_n \int_0^\infty e^{-x}\, \varphi_{n-1}^2\, dx = C_n.$$

Immers is voor $k = n$ (§ 13)

$$B_{n-1}^{n-1} = \left(\frac{n}{k}\right)^{n-1} = 1.$$

Bij de termen, waarvoor $k > n$ is, komen van de formule (40) slechts in aanmerking de beide stukken

$$B_{n-1}^{k-1}\, \varphi_{n-1}(x) + B_n^{k-1}\, \varphi_n(x),$$

die dus na integratie geven:

$$\int_0^\infty e^{-x}(\varphi_{n-1} - \varphi_n)(B_{n-1}^{k-1}\, \varphi_{n-1} + B_n^{k-1}\, \varphi_n)dx = B_{n-1}^{k-1} - B_n^{k-1} =$$

$= 0$, volgens (48).

Van het tweede lid van (128) blijft dus alleen de term C_n over:

$$C_n = \int_0^\infty e^{-x} (\varphi_{n-1} - \varphi_n) f(n\beta x)\, dx$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^\infty f(n\beta x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^n e^{-x})\, dx.$$

Halphén tracht nu omgekeerd de reeks

$$\sum_1^\infty C_k \varphi_{k-1}\left(\frac{x}{k\beta}\right)$$

te sommeeren.

Hij bewijst, dat deze reeks convergeert, *maar tot een andere limiet dan* $f(x)$, tenzij het mogelijk is, getallen α te vinden, die den vorm $m!\, \alpha^m f^{(m)}(x)$ oneindig klein maken voor $m = \infty$. Als α willekeurig groot genomen kan worden, dan is de keus van β aan geen voorwaarden gebonden; anders ligt β tusschen bepaalde grenzen. De reeksontwikkeling geldt in beide gevallen voor alle waarde van x.

De getallen α zijn alleen te vinden, als $f(x)$ een polynomium is. In alle andere gevallen is dus de ontwikkeling foutief. Zoo geeft de formule (128) voor e^{-xt}:

$$F(xt) = \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{2t}{(1+2t)^3} \varphi_1\left(\frac{x}{2}\right) + \dots +$$
$$+ \frac{(nt)^{n-1}}{(1+nt)^{n+1}} \varphi_{n-1}\left(\frac{x}{n}\right) + \dots,$$

een convergente reeks, die echter *niet tot* e^{-xt} convergeert.

§ 47. Halphéns curieus resultaat bewijst nog niets tegen de ontwikkeling eener functie naar $\varphi_n(x)$. Terwijl b.v. de ontwikkeling van e^{-xt} volgens Halphéns methode spaak loopt, levert ze, zoo x en niet $\frac{x}{n\beta}$ als argument der functie φ_n genomen wordt, niet de minste bezwaren op (§ 43). Ik heb echter de kwestie van de algemeene ontwikkeling naar φ_n nog niet tot klaarheid kunnen brengen. Verschillende wegen ben ik ingeslagen, zonder evenwel het doel te bereiken. Het meest

voor de hand lag de methode, die bij Besselsche, bol- en andere functiën zulke goede resultaten geeft, nl. de substitutie van een convergente reeks voor $\frac{1}{z-x}$ in de formule van CAUCHY,

$$f(x) = \int \frac{f(z)}{z-x}\, dz,$$

in welke formule de integraalweg een gebied moet omsluiten, waarbinnen $f(z)$ steeds holomorf is. Nu wijst de in § 25 gevonden uitdrukking

$$\psi_n(x) = e^x \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{x-z}\, \varphi_n(z)\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

op een ontwikkeling van $\frac{1}{x-z}$ naar φ-functiën. Het is alsof men

$$\frac{1}{x-z} = \sum_0^\infty \omega_i(x)\, \varphi_i(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

gesteld heeft, en toen door de integraal-eigenschappen van § 6 de coefficienten $\omega_i(x)$ heeft bepaald in den vorm

$$\omega_n(x) = e^{-x}\, \psi_n(x).$$

Is nu

$$\frac{1}{x-z} = e^{-x} \sum_0^\infty \psi_i(x)\, \varphi_i(z),$$

dan is men geheel op den weg, die bij andere functiën tot het doel voert. Ongelukkig geeft de ontwikkeling van de verg. (129) naar $\frac{z}{x}$, bij vervanging van z^μ door $\sum_0^\mu A_i^\mu\, \varphi_i(z)$, volgens (29), een reeks,

$$\omega_n(x) = e^{-x}\, \psi_n(x) = (-1)^n \left[\frac{n!}{x^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{x^{n+2}} \binom{n+1}{1} + \right.$$
$$\left. + \frac{(n+2)!}{x^{n+3}} \binom{n+2}{2} + \dots \right],$$

die voor alle eindige waarden van x divergeert, en dus niet te gebruiken is. Ik heb nu op verschillende wijzen getracht, de reeks

$$e^{-x} \sum_0^\infty \varphi_i(z)\, \psi_i(x) = \sum_0^\infty \varphi_i(z)\, \omega_i(x)$$

te sommeeren tot $\frac{1}{x-z}$, zonder van de divergente reeks voor $\omega_i(x)$ gebruik te maken. Vervangt men $\varphi_i(z)$ en $\psi_i(x)$ resp. door een' bepaalden integraal en door den residuvorm (3), dan is de sommatie wel uitvoerbaar, binnen zeker gebied van convergentie, maar de daarop volgende integratie biedt te groote zwarigheden.

Gebruikt men de formule (122) in plaats van (29), dan wordt

$$\frac{1}{x-z} = \sum_0^\infty e^{-x} \varphi_{-n}(x)\, \bar{\omega}_n(z),$$

waarin nu

$$\bar{\omega}_{n+1}(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} - \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}\binom{n+1}{1} + \frac{(n+2)!}{z^{n+3}}\binom{n+2}{2} - \ldots$$

een reeks is, die evenzeer voor alle waarden van z divergeert.

§ 48. Ook dit divergeeren van reeksen, die bij analoge functiën convergeeren, bewijst nog niet de onmogelijkheid eener ontwikkeling volgens φ_n.

Een ontwikkeling volgens φ_n is slechts op één wijze mogelijk. Gesteld nl.

$$f(x) = a_0 + a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \ldots.$$

en

$$f(x) = b_0 + b_1 \varphi_1(x) + b_2 \varphi_2(x) + \ldots.$$

dus

$$0 = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\varphi_1(x) + (a_2 - b_2)\varphi_2(x) + \ldots,$$

dan geven de integraal-eigenschappen van § 6 onmiddellijk $a_i = b_i$. Dit bewijs geldt natuurlijk voor de functie φ evenzeer als b.v. voor de bolfunctiën. Bij deze laatste nu komt men schijnbaar tot twee ontwikkelingen. De vergelijking van Cauchy geeft nl. coefficienten met de functie der 2e soort, Q_n, onder het integraalteeken, terwijl de gewone integraal-eigenschappen der functie 1e soort, P_n, een ontwikkeling geven met P_n onder het integraalteeken. Men moet kunnen bewijzen, dat deze beide integraalvormen voor de coefficienten identiek zijn. Het is nu zeer goed denkbaar, dat voor de functie φ_n, waarbij de vergelijking van Cauchy ons in den steek laat, deze gelijkheid ophoudt te bestaan, zonder dat

daarom de ontwikkeling volgens φ_n, waarbij de coefficienten door de integraal-eigenschappen gevonden worden, vervalt. Deze ontwikkeling zou nu te bewijzen zijn, door de reeks

$$\sum_0^\infty \varphi_n(x) \int_0^\infty e^{-z} f(z)\, \varphi_n(z)\, dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

rechtstreeks te sommeeren. Wel is waar leert de formule (38) een uitdrukking voor $\sum_0^n \varphi_n(x)\, \varphi_n(z)$ vinden, maar het is mij nog niet gelukt, de limiet van het tweede lid te vinden. Evenmin heb ik de convergentie der reeks $\sum_0^\infty \varphi_n(x)\, \varphi_n(z)$ kunnen bewijzen, d. i. de convergentie der reeks (130). Was dit bewijs geleverd, dan zou men gemakkelijk kunnen aantoonen, dat de som $f(x)$ moet zijn. Stelt men nl.

$$\sum_0^\infty \varphi_n(x) \int_0^\infty e^{-z} f(z)\, \varphi_n(z)\, dz = \mathrm{F}(x),$$

dan is

$$\int_0^\infty e^{-x}\, \mathrm{F}(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-z} f(z)\, \varphi_n(z)\, dz \int_0^\infty e^{-x}\, \varphi_n(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

of

$$\int_0^\infty e^{-x}\, [\mathrm{F}(x) - f(x)]\, \varphi_n(x)\, dx = 0,$$

dus ook, daar x^n door φ's te vervangen is,

$$\int_0^\infty e^{-x}\, [\mathrm{F}(x) - f(x)]\, \Pi\, dx = 0,$$

waarin Π een geheel willekeurig polynomium; kiest men nu dit polynomium zoo, dat het tegelijk met $\mathrm{F}(x) - f(x)$ van teeken verandert, dan moet, daar e^{-x} steeds positief blijft, overal tusschen 0 en ∞ $\mathrm{F}(x) = f(x)$ zijn. [1])

---

[1]) LIOUVILLE, Journal de Math. Vol. II. (1837) p. 1.

HOOFDSTUK V.

§ 49. Ik wil nog enkele paragrafen wijden aan een overzicht van de punten van overeenkomst tusschen $\varphi_n(x)$ en Besselsche, trigonometrische en bolfunctiën, alle leden van dezelfde familie. Ik zal me hoofdzakelijk met bolfunctiën bezighouden, waarvan de verwantschap met de Besselsche functiën gemakkelijk is na te gaan. Men zie o. a. het boekje van C. NEUMANN: „Theorie der Bessel'schen Funktionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen."
Er zijn functiën van de eerste en van de tweede soort, φ_n en ψ_n, zooals er bolfunctiën P_n en Q_n zijn. Het zijn de beide oplossingen van een differentiaalvergelijking [1]) der tweede orde, die een speciaal geval is van de diff.-vergelijking der hypergeometrische reeks. Noemt men φ_n en P_n van de orde n, dan is er iets voor te zeggen, om ψ_n en Q_n tot de orde $-n-1$ te rekenen. Zie b. v. § 22, waarin een vorm voor φ_n en ψ_n optreedt, dien men als formule van RODRIGUES bij de bolfunctiën terugvindt. De vormen φ_n en P_n zijn polynomia, ψ_n en Q_n reeksen. Beide hebben hun verwante functiën $x^k \varphi_n^{(k)}$ en $(x^2-1)^{\frac{k}{2}} P_n^{(k)}$. Van beide functiën zijn alle wortels reëel, en gelegen binnen bepaald aan te wijzen grenzen. Zoowel φ_n als P_n zijn als Sturmsche functiën te beschouwen. De polynomia φ_n en P_n hebben integraal-eigenschappen, die tot in

[1]) De analogie met de Besselsche functiën is hier alleen duidelijk voor hem, die niet NEUMANNS, maar LOMMELS behandeling van het onderwerp volgt.

bijzonderheden onderling overeenkomen. Voor P_n geldt een dergelijk stel eigenschappen, als voor φ_n in § 5 gevonden is, terwijl ten slotte zoowel P_n als φ_n in determinantvorm geschreven kan worden.

§ 50. Nadere bespreking verdient het verband, dat tusschen φ_n en ψ_n bestaat. Dat de formule (58) ook bij de bolfunctiën optreedt, spreekt van zelf. Meer verrassend is het, dat de gedeeltelijke integratie van deze formule leidt tot een betrekking tusschen φ_n en ψ_n:

$$\psi_n(x) = e^x \chi_n(x) + \varphi_n(x) \int_{-\infty}^{x} \frac{e^x}{x}\, dx,$$

die volkomen analoog is met

$$Q_n(x) = R_n(x) + P_n(x) \log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$R_n(x)$ en $\chi_n(x)$ zijn polynomia van den graad $n-1$, die aan een diff.-verg. der tweede orde voldoen. Ook de formule

$$\psi_n(x) = e^x \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{x-z} \varphi_n(z)\, dz$$

komt geheel overeen met een relatie uit de leer der bolfunctiën:

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)}{x-z}\, dz.$$

$\frac{R_n(x)}{P_n(x)}$ en $\frac{\chi_n(-x)}{\varphi_n(-x)}$ zijn respectievelijk naderingsbreuken van $e^x \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-z}}{z}\, dz$ en van $\log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, welke transcendente functiën beide in een kettingbreuk kunnen worden ontwikkeld. Deze eigenschappen vooral zijn het, die er op wijzen, dat de functiën φ_n en P_n tot een grootere familie behooren. Men zie de algemeene behandeling van dit punt in het reeds aangehaalde werk van Jordan (p. 248).

Daar wordt de integraal

$$I = \int_a^b \frac{f(z)}{x-z}\, dz$$

ontwikkeld in een reeks

$$\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots,$$

waarin

$$\alpha_m = \int_a^b z^{m-1} f(z)\, dz.$$

Zoo deze reeks in den vorm eener kettingbreuk geschreven wordt, die het polynomium S_n tot noemer der n^{de} naderingsbreuk heeft, moet S_n voldoen aan de voorwaarde

$$\int_a^b \omega(z)\, S_n f(z)\, dz \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (131)$$

waarin $\omega(z)$ een polynomium van graad $< n$ voorstelt. Aan deze voorwaarde voldoet slechts één polynomium S_n; de vergelijking $S_n = 0$ heeft slechts reëele wortels, alle gelegen tusschen a en b.

In elk bijzonder geval moet onderzocht worden, in hoever de reeksontwikkeling volgens S_n, waarvoor (131) de coefficienten levert, geldig is. Ongelukkig zag ik op dit gebied de functiën φ_n en P_n verschillende wegen bewandelen, en weet ik nog niet, of deze ten slotte toch nog naar hetzelfde punt voeren.

§ 51. Evenals $P_n(x)$ uit de ontwikkeling van

$$U = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

naar t volgt, wordt $\varphi_n(x)$ gedefinieerd door

$$u = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_0^\infty \varphi_n(x)\, t^n.$$

Beide moederfunctiën, om ze zoo te betitelen, voldoen aan een diff.-verg. der tweede orde, $U = \frac{1}{r}$ aan

$$(1-2\,xt+t^2)\,\mathrm{U}''-3\,(x-t)\,\mathrm{U}'+\mathrm{U}=0,$$

u aan

$$(1-2t+t^2)\,u''+(x+3t-3)\,u'+u=0, \quad . \quad (132)$$

waarin x als constante beschouwd wordt. Uit

$$u=\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}$$

volgt nl.

$$u'=\frac{1-t-x}{(1-t)^2}\,u$$

en

$$u''=\frac{1-t-x}{(1-t)^2}\,u'+\frac{1-t-2x}{(1-t)^3}\,u,$$

met welke waarden gemakkelijk de diff.-verg.

$$(1-t)^2\,u''+(x+3t-3)\,u'+u=0$$

te verifieeren is. Deze diff.-verg. volgt ook, volgens een methode, aangegeven door Poincaré [1]), uit de recurrente betrekking (24), geschreven in den vorm

$$n\,\varphi_n(x)-2\,(n-1)\,\varphi_{n-1}(x)+(x-1)\,\varphi_{n-1}(x)+(n-1)\,\varphi_{n-2}(x)=0,$$

door vermenigvuldiging met $(n-1)\,t^{n-2}$ en sommatie van 1 tot ∞. Uit de waarden

$$u=\sum_0^\infty t^n\,\varphi_n(x)=\sum_1^\infty t^{n-1}\,\varphi_{n-1}(x),$$

$$u'=\sum_1^\infty n\,t^{n-1}\,\varphi_n(x)=\sum_1^\infty (n-1)\,t^{n-2}\,\varphi_{n-1}(x)$$

en

$$u''=\sum_1^\infty n\,(n-1)\,t^{n-2}\,\varphi_n(x)=\sum_1^\infty (n-1)\,(n-2)\,t^{n-3}\,\varphi_{n-1}(x)$$

leidt men nl. af:

$$\sum_1^\infty n\,(n-1)\,\varphi_n(x)\,t^{n-2}=u'',$$

$$(x-1)\sum_1^\infty (n-1)\,\varphi_{n-1}(x)\,t^{n-2}=(x-1)\,u',$$

$$-2\sum_1^\infty (n-1)^2\,\varphi_{n-1}(x)\,t^{n-2}=-2\sum_1^\infty n^2\,\varphi_n(x)\,t^{n-1}=-2\,(t\,u''+u')$$

en

$$\sum_1^\infty (n-1)^2\,\varphi_{n-2}(x)\,t^{n-2}=\sum_1^\infty n^2\,\varphi_{n-1}(x)\,t^{n-1}=t^2\,u''+3\,t\,u'+u,$$

---

[1]) C. R. XCVI, p. 637.

zoodat de verg.

$$\sum_{1}^{\infty} n(n-1)\, q_n t^{n-2} + \sum_{1}^{\infty}(x+1-2n)(n-1)\,\varphi_{u-1} t^{n-2} + \sum_{1}^{\infty}(n-1)^2\, \varphi_{n-2} t^{n-2} = 0$$

overgaat in

$$(1-2t+t^2)\,u'' + (x-3+3t)\,u' + u = 0 \quad . \quad (132)$$

of in

$$\tau^2 \frac{d^2 u}{d\tau^2} + (x + 3\tau)\frac{du}{d\tau} + u = 0\,, \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

waarin $\tau = t-1$. Het eenige kritieke punt der coefficienten van u' en u, na deeling door $1-2t+t^2$ is $t=1$. De oplossing u is derhalve holomorf binnen het gebied, waarvoor *mod* $t < 1$. Aan de diff.-verg. (133) voldoet nog een tweede functie $U = uv$, die op de bekende wijze uit de oplossing u wordt afgeleid. Ik vind:

$$\frac{v''}{v'} + 2\frac{u'}{u} + \frac{x+3\tau}{\tau^2} = 0,$$

zoodat

$$v' = \frac{1}{u^2\tau^3}\, e^{\frac{x}{\tau}}$$

een particuliere oplossing is. Substitutie van

$$u = -\frac{1}{\tau}\, e^{x\frac{\tau+1}{\tau}}$$

geeft dan

$$U = u\int_{\infty}^{\frac{x}{\tau}} \frac{e^{-z}}{z}\, dz; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

ook hier komt dus weer de int.-log. te voorschijn.

§ 52. In deze laatste paragrafen wil ik een overzicht geven van een verhandeling van Tchébychef [1]) waarin zeer duidelijk de verwantschap van de φ-functiën met trigonometrische, Besselsche en bolfunctiën aan den dag komt.

---

[1]) **Bulletin de l'Ac. Imp. de St. Pét. 1860, T. I, p. 193, en Journal de Liouville, 2de Série, T. III, p. 289.**

F (X) kan, onderstelt men, door een polynomium van den graad m met voldoende nauwkeurigheid worden weergegeven. Door waarneming zijn de $n+1$ waarden ($n \geqq m$)

$$F(x_0),\ F(x_1),\ \ldots\ F(x_n)$$

bekend, met de gewichten $g_0, g_1 \ldots g_n$. Gevraagd wordt, F (X) zoo goed mogelijk, volgens het principe van de methode der kleinste kwadraten, te schrijven als $\sum_0^n \lambda_i F(x_i)$. TCHÉBYCHEF vindt:

$$F(X) = (-1)^m \sum_{i=o}^{i=n} \frac{\psi_m(X)\,\psi_{m+1}(x_i) - \psi_{m+1}(X)\,\psi_m(x_i)}{x_i - X}\, g_i\, F(x_i), \quad . \quad . \quad (135)$$

waarin ψ_m de noemer is van de m^{de} naderingsbreuk, die optreedt bij de ontwikkeling van $g\,\frac{f'(x)}{f(x)}$ in een kettingbreuk, terwijl

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

is. Daar de wijzergetallen der kettingbreuk den vorm $A_i x + B_i$ hebben, kan men ook schrijven:

$$F(X) = \sum_0^m (-1)^m A_{m+1}\, \psi_m(X) \sum_{i=o}^{i=n} \psi_m(x_i)\, g_i\, F(x_i), \quad . \quad (136)$$

uit welke formule nu, duidelijker dan uit (135), blijkt, dat F (X) door een polynomium van den graad m is voorgesteld. Door voor F (X) ψ_m (X) te nemen, vindt TCHÉBYCHEF:

$$\left.\begin{aligned} & A_{m+1} = \frac{(-1)^m}{\sum_0^n g_i\, \psi_m^2(x_i)}, \\ & \text{of} \\ & \sum_0^n g_i\, \psi_m^2(x_i) = \frac{(-1)^m}{A_{m+1}}, \\ & \text{terwijl} \\ & \sum_0^n g_i\, \psi_m(x_i)\, \psi_{m'}(x_i) = 0 \\ & \text{is.} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

§ 53. Hij behandelt nu verschillende onderstellingen omtrent de verdeeling der waarden x_i en omtrent de gewichten g_i.

1°. Neemt men $n = \infty$, en laat men $x_i = u$ varieeren tusschen —1 en + 1, terwijl

$$g_i = g(u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

is, dan wordt

$$g \frac{f'(x)}{f(x)} = \Sigma \frac{g(u)}{x-u} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

De noemers van de naderingsbreuken der kettingbreuk

$$\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} = \cfrac{\pi}{x - \cfrac{1}{2x - \cfrac{1}{2x - \text{enz.}}}},$$

zijn $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, $\cos 3\varphi$ enz., waarin $\cos\varphi = x$. De formule (136) geeft nu FOURIERS ontwikkeling naar cosinussen, echter zonder de mogelijkheid dier reeksontwikkeling streng te bewijzen. De integraal-eigenschappen (137) leveren de coefficienten der ontwikkeling.

2°. In dezelfde hypothese omtrent x_i, en zoo $g(u)$ = een constante is, vindt TCHÉBYCHEF:

$$\Sigma \frac{g_i}{x-x_i} = \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} = \log \frac{x+1}{x-1},$$

een functie, die bij ontwikkeling in een kettingbreuk, tot noemers der nad. breuken de bolfunctiën blijkt te bezitten. Formule (136) geeft nu een reeksontwikkeling naar bolfunctiën, welker coefficienten door (137) gevonden worden.

3°. Laat men $x_i = u$ tusschen de grenzen 0 en ∞ varieeren, terwijl $g(u) = e^{-u}\,du$ is, dan wordt

$$\Sigma \frac{g_i}{x-x_i} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{x-u}\,du = e^{-x} \int_\infty^{-x} \frac{e^{-z}}{z}\,dz.$$

Volgens § 27 is deze integraal te schrijven als een kettingbreuk met

$$\varphi_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^n)$$

tot noemer der n^{de} naderingsbreuk.
Nu is

$$\int_0^\infty \varphi_n^2(x)\, e^{-x}\, dx = 1,$$

zoodat de reeksontwikkeling (136) wordt:

$$F(X) = \sum_0^\infty \varphi_n(X) \int_0^\infty e^{-x} \varphi_n(x)\, F(x)\, dx.$$

Echter levert TCHÉBYCHEF geen schijn van bewijs voor de mogelijkheid der reeksontwikkeling; hij spreekt zelfs niet over de convergentie der gevonden reeksen, maar draagt eenvoudig, wat hij voor $n =$ eindig, d. i. voor een polynomium gevonden heeft, over op het geval $n =$ oneindig.

STELLINGEN.



STELLINGEN.

I.

De grondstelling van de Leer der onbepaalde coefficienten mag niet bewezen worden door beurtelings de variabele x gelijk aan nul te stellen, en door x te deelen.

II.

De *beginselen* der Beschrijvende Meetkunde behooren niet aan een Universiteit onderwezen te worden.

III.

De inhoud der pyramide kan zonder integratie gevonden worden.

IV.

Op het dualiteitsbeginsel, dat in de „Geometrie der Lage” zulk een voorname rol speelt, moet ook in de elementaire meetkunde groote nadruk gelegd worden.

V.

De beginselen der Waarschijnlijkheidsrekening moeten op het Gymnasium onderwezen worden.

VI.

Het „probleem van St. Petersburg" heeft niets paradoxaals.

VII.

Men heeft niet het recht, zonder bewijs aan te nemen, dat de lijn van constante richting den kortsten weg tusschen twee punten vormt.

VIII.

Bij veel schrijvers van leerboeken heerscht groote verwarring in de begrippen „gegevens" en „bepaald door."

Zoo leest men in hetzelfde werk: „de rechte lijn is door 2 punten bepaald," en eenige bladzijden verder: „een driehoek is door zijn drie zijden bepaald."

Zoo vinden Watson en von Oppolzer ten onrechte de voor de bepaling eener planetenloopbaan noodige zes gegevens in de zes waargenomen coördinaten.

IX.

Te eenenmale onjuist is de bewering van Versluys (zie zijn „Boldriehoeksmeting" 2e dr., p. 12) dat bij de berekening van rechthoekige boldriehoeken, welker gegeven hypotenusa c en rechthoekszijde a weinig onderling verschillen,

de formule

$$cos\ b = \frac{cos\ c}{cos\ a}$$

onnauwkeuriger resultaten oplevert dan de formule

$$tg\ \tfrac{1}{2}\ b = \sqrt{tg\ \tfrac{1}{2}\ (c + a)\ tg\ \tfrac{1}{2}\ (c - a)}.$$

Zelfs CHAUVENET (zie o. a. „Spherical and Practical Astr.", Deel I, p. 37) maakt zich aan een dergelijke fout schuldig.

X.

Het is wenschelijk, den afkoop van levensverzekerings-contracten op beteren grondslag te regelen, dan thans geschiedt.

XI.

De kometen hebben altijd deel van het zonnestelsel uit-gemaakt.

XII.

Het Zodiakaallicht verklaart de waarneming van de nacht-zijden der planeten Mercurius en Venus.

XIII.

Het is wenschelijk, een decimale hoek- en tijdverdeeling in te voeren.

XIV.

Een bepaling der praecessie, die geen rekening houdt met de voortgaande beweging van het zonnestelsel, heeft geen wetenschappelijke waarde.

XV.

De populaire toelichting van de praecessie met behulp van het parallelogram van rotatie-assen is niet te verdedigen.

XVI.

De uitdrukkingen *soortelijke massa*, *soortelijke warmte* en dergelijke bevatten een contradictio in terminis, en behooren dus niet in leerboeken voor te komen.

XVII.

Een noodzakelijke contrôle maakt het gewenscht, te zoeken naar een onmiddellijke bepaling van de soortelijke warmte *) van gassen bij constant volumen.

XVIII.

De kleuren van Becquerels fotografieën behooren niet in de eerste plaats interferentie-kleuren genoemd te worden, maar moeten beschouwd worden als te zijn ontstaan langs den gewonen weg der selectieve opslorping van het witte licht.

*) Ik behoud ondanks Stelling XVI dezen term hier *gemakshalve*.

XIX.

Het molecuul Argon bestaat uit drie atomen Stikstof.

XX.

Helium komt in onze atmosfeer voor.

XXI.

Zilver is tweewaardig.

XXII.

De oorsprong der Wetenschap is niet te zoeken in 's menschen zinnelijke natuur.

ERRATA.

Bladz. 6, regel 7 v. o. staat: $\left(\frac{n}{k}\right)$, moet zijn: $\binom{n}{k}$.

„ 6, „ 7 en 8 v. o. staat: $\frac{1}{k!\,t^k}$, moet zijn: $\frac{x^k}{k!\,t^k}$,

staat: $x^k\,t^k$, moet zijn: t^k.

„ 6, „ 4 en 5 v. o. staat: $\frac{t^k}{k!}$, moet zijn: $\frac{1}{k!\,t^k}$,

staat: $\frac{x^k}{t^k}$, moet zijn: $x^k\,t^k$.

„ 6, „ 2 v. o. staat: u_{k+1}, moet zijn: u_k.

„ 7, formule (6) staat: $(1 \pm t)^n$, moet zijn: $(t \pm 1)^n$.

„ 7, formules (10) en (12) staat: $(1 \mp t)^n$, moet zijn: $(t \mp 1)^n$.

„ 12, regel 7 v.o. staat: $\left| e^{-x}\,\varphi_n\,\varphi_n \right|_0^\infty$, moet zijn: $-\left| e^{-x}\,\varphi_n^2 \right|_0^\infty$.

„ 12, „ 5 v. o. staat: e^-, moet zijn: e^{-x}.

„ 39, „ 9 v. o. staat: $x = z + t$, moet zijn: $z = x - t$.

„ 42, „ 13 v. b. staat: $\varphi_n(-z)$, moet zijn: $\varphi_n(-x)$.

„ 46, „ 3 v. o. staat: $x!$, moet zijn: $n!$

„ 51, „ 3 v. b. staat: D, moet zijn: $\frac{d}{dx}$.

„ 59, „ 4 v. b. staat: x^{-1}, moet zijn: $x^{\mu-1}$.

„ 62, „ 4 v. b. staat: $\Big|_\infty^0$, moet zijn: $\Big|_0^\infty$.

„ 67, „ 14 v. b. staat: waarde, moet zijn: waarden.

C. C. B. L.

INHOUD.